

## ***Lógica Fuzzy***

**Profs. João Alberto Fabro  
André Schneider de Oliveira**

*Adaptado de material dos profs. Mauro Roisenberg e  
Luciana Rech - UFSC*

# Introdução

- A **Lógica Fuzzy** é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy.
- Tradicionalmente, uma proposição lógica tem dois extremos: ou é completamente verdadeiro ou é completamente falso.
- Entretanto, na lógica Fuzzy, uma premissa varia em **grau de verdade** de 0 a 1, o que leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.

# Introdução

- Surgiu com *Lofti A. Zadeh*, Berkeley (1965).
  - para tratar do aspecto vago da informação;
  - 1978 – desenvolveu a Teoria das Possibilidades
    - menos restrita que a noção de probabilidade
  - ligar a linguística e a inteligência humana, pois muitos conceitos são melhores definidos por palavras do que pela matemática.
- É uma técnica baseada em graus de pertinência (verdade).
  - os valores 0 e 1 ficam nas extremidades
  - inclui os vários estados de verdade entre 0 e 1
  - idéia: todas as inf. admitem graus (temperatura, altura, velocidade, distância, etc...)

# Introdução

- Considerando a seguinte sentença: **Joãozinho é alto.**
- A proposição é verdadeira para uma altura de Joãozinho 1.65m?
- O termo linguístico “**alto**” é vago, como interpretá-lo?
- A teoria de conjuntos Fuzzy (semântica para lógica fuzzy) permite especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga (predicado vago)

# Introdução

- **Lógica convencional:** sim/não, verdadeiro/falso
- **Lógica Fuzzy** (difusa ou nebulosa):
  - Refletem o que as pessoas pensam
  - Tenta modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum
  - Trabalha com uma grande variedade de informações vagas e incertas, as quais podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.

# Introdução

- Sistemas baseados em lógica fuzzy podem ser usado para gerar estimativas, tomadas de decisão, sistemas de controle mecânico...
  - Ar condicionado.
  - Controles de automóveis.
  - Casas inteligentes.
  - Controladores de processo industrial.
  - etc...

# Introdução

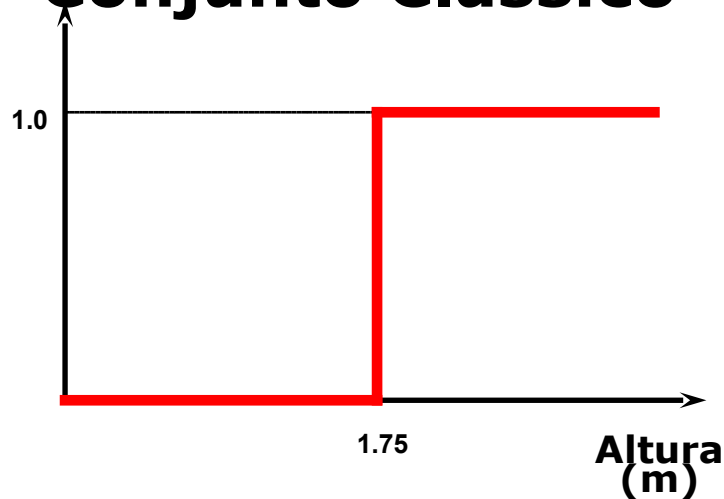
- O **Japão** é um dos maiores utilizadores e difusores da lógica fuzzy.
  - O **metrô** da cidade de Sendai utiliza desde 1987 um sistema de controle fuzzy.
  - **Aspiradores de pó e máquinas de lavar** da empresa Matsushita - carrega e ajusta automaticamente à quantidade de detergente necessário, a temperatura da água e o tipo de lavagem.
  - **TVs da Sony** utilizam lógica fuzzy para ajustar automaticamente o contraste, brilho, nitidez e cores.
  - A **Nissan** utiliza lógica fuzzy em seus **carros** no sistema de transmissão automática e freios antitravamento.
  - Mitsubishi tem um ar condicionado industrial que usa um controlador fuzzy. Economiza 24% no consumo de energia.
  - Câmeras e gravadoras usam fuzzy para ajustar foco automático e cancelar os tremores causados pelas mãos trêmulas.

# Conjuntos Fuzzy

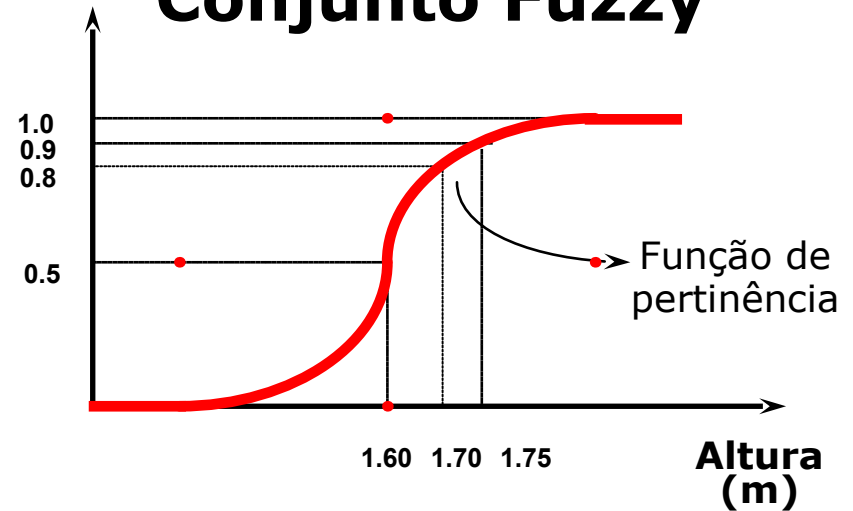
## 💡 Conjuntos com limites imprecisos

A = Conjunto de pessoas altas

### Conjunto Clássico



### Conjunto Fuzzy





# Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy  $A$  definido no universo  $X$  é caracterizado por uma **função de pertinência**  $u_A$ , a qual mapeia os elementos de  $X$  para o intervalo  $[0,1]$ .

$$u_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento  $y$  pertencente a  $X$  um número real no intervalo  $[0,1]$ , que representa o **grau de pertinência** do elemento  $y$  ao conjunto  $A$ , isto é, o quanto é possível para o elemento  $y$  pertencer ao conjunto  $A$ .
- Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa.

# Conjuntos Fuzzy

A função de pertinência  $\mu_A(x)$  indica o grau de compatibilidade entre  $x$  e o conceito expresso por  $A$ :

$\mu_A(x) = 1$  indica que  $x$  é completamente compatível com  $A$ ;

$\mu_A(x) = 0$  indica que  $x$  é completamente incompatível com  $A$ ;

$0 < \mu_A(x) < 1$  indica que  $x$  é parcialmente compatível com  $A$ , com grau  $\mu_A(x)$ .

**crisp**

pode ser visto como um conjunto nebuloso específico (teoria de conjuntos clássica)

$\mu_A \{0,1\}$  pertinência do tipo “tudo ou nada”, “sim ou não” e não gradual como para os conjuntos nebulosos

# Conjuntos Fuzzy

- Definição formal: Um conjunto fuzzy  $A$  em  $X$  é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{ (x, u_A(x)) \mid x \in X \}$$

Conjunto Fuzzy

Função de Pertinência

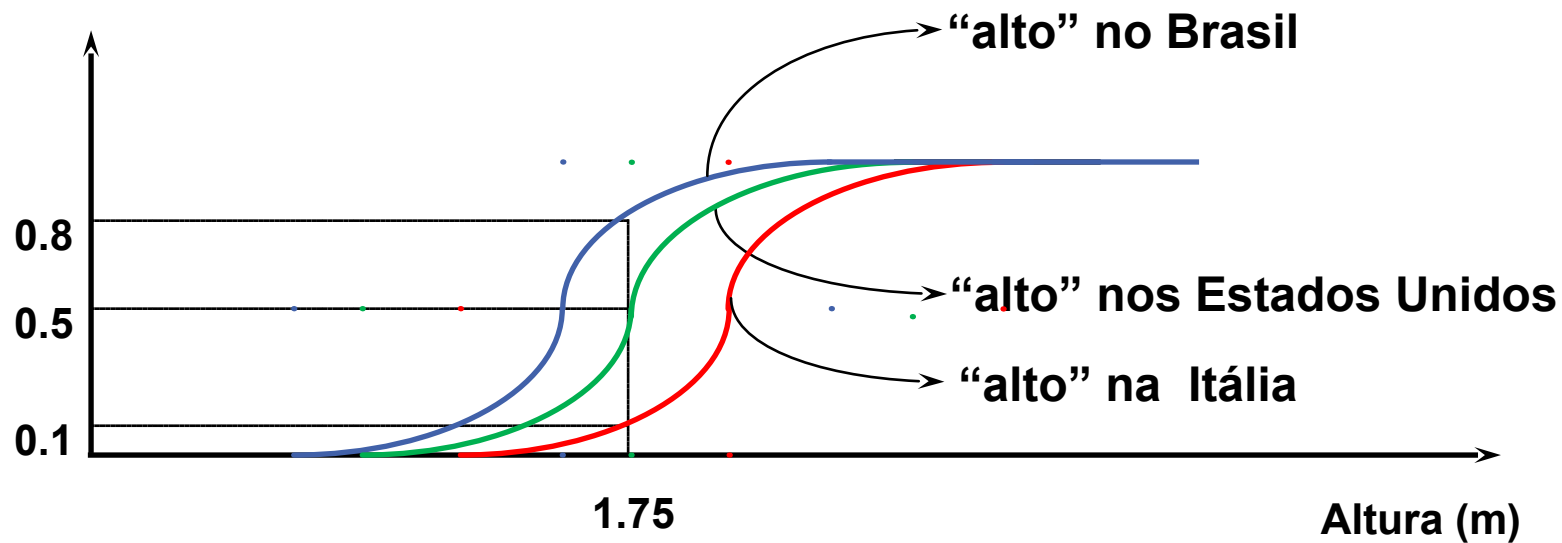
Universo

Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência.

# Função de Pertinência

- **Reflete o conhecimento** que se tem em relação a intensidade com que o objeto **pertence ao conjunto fuzzy**.
- Várias formas diferentes.
- Características das funções de pertinência:
  - Medidas subjetivas.
  - Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.

# Função de Pertinência



# Função de Pertinência

- **Função Triangular:**

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- **Função Trapezoidal:**

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

- **Função Gaussiana:**

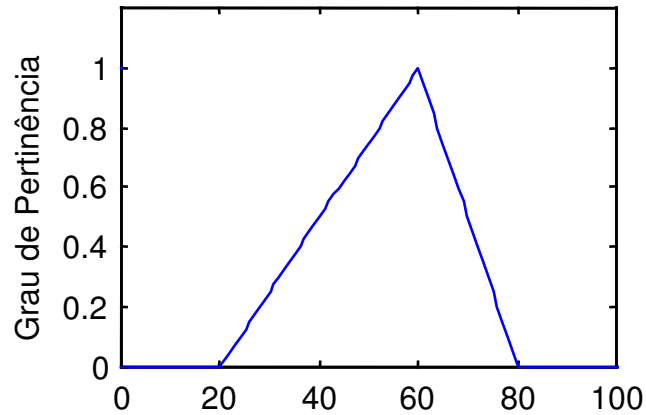
$$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

- **Função Sino Generalizada:**

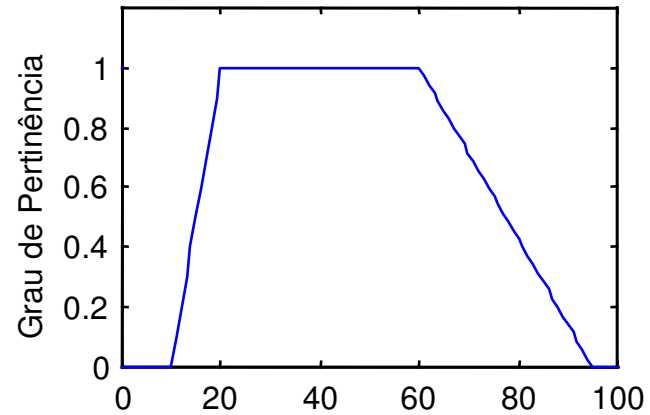
$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

# Função de Pertinência

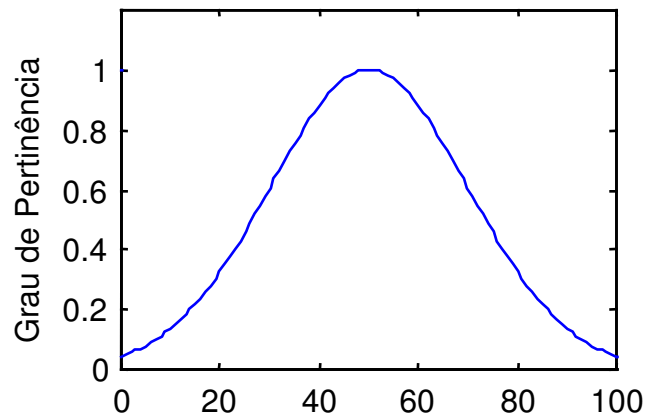
(a) Triangular



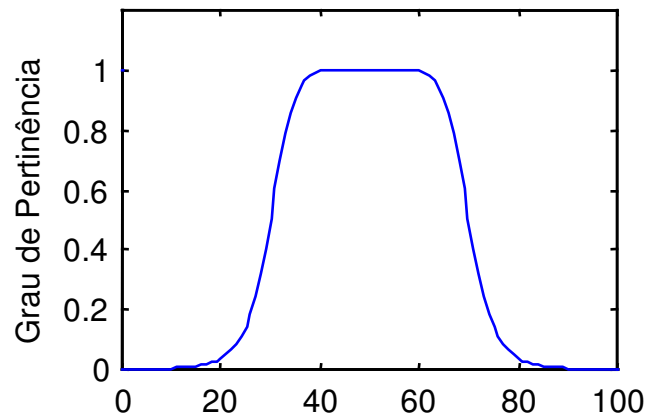
(b) Trapezoidal



(c) Gaussiana



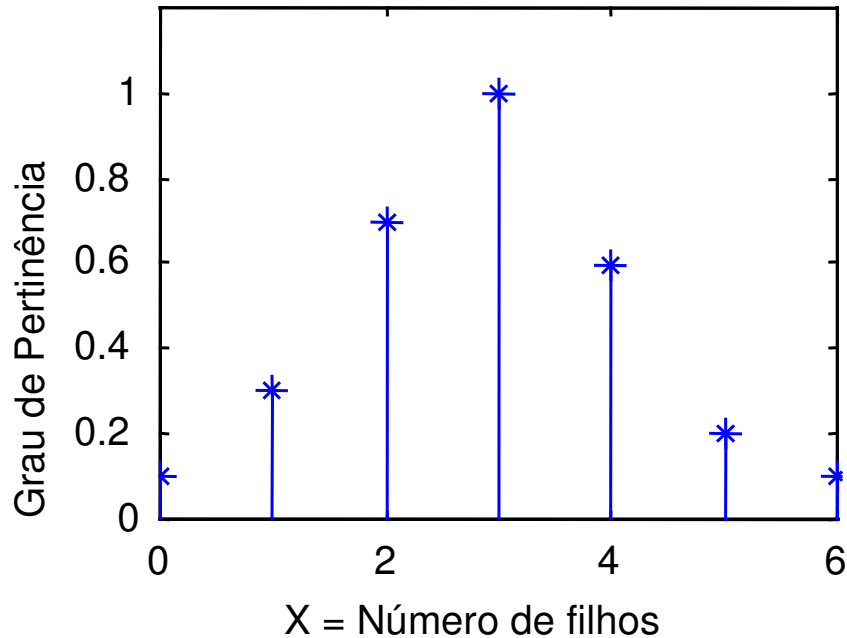
(d) Sino Generalizada



# Função de Pertinência: Universo Discreto

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Universo Discreto



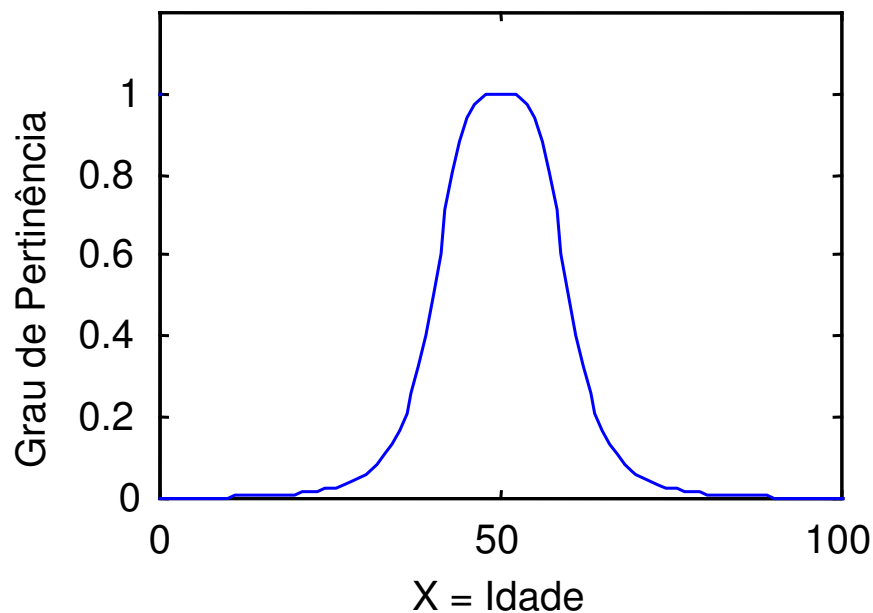
A = “Número de filhos razoável”

$$A = \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.6), (5, 0.2), (6, 0.1)\}$$



# Função de Pertinência: Universo Contínuo

(b) Universo Contínuo



$X =$  (Conjunto de números reais positivos)

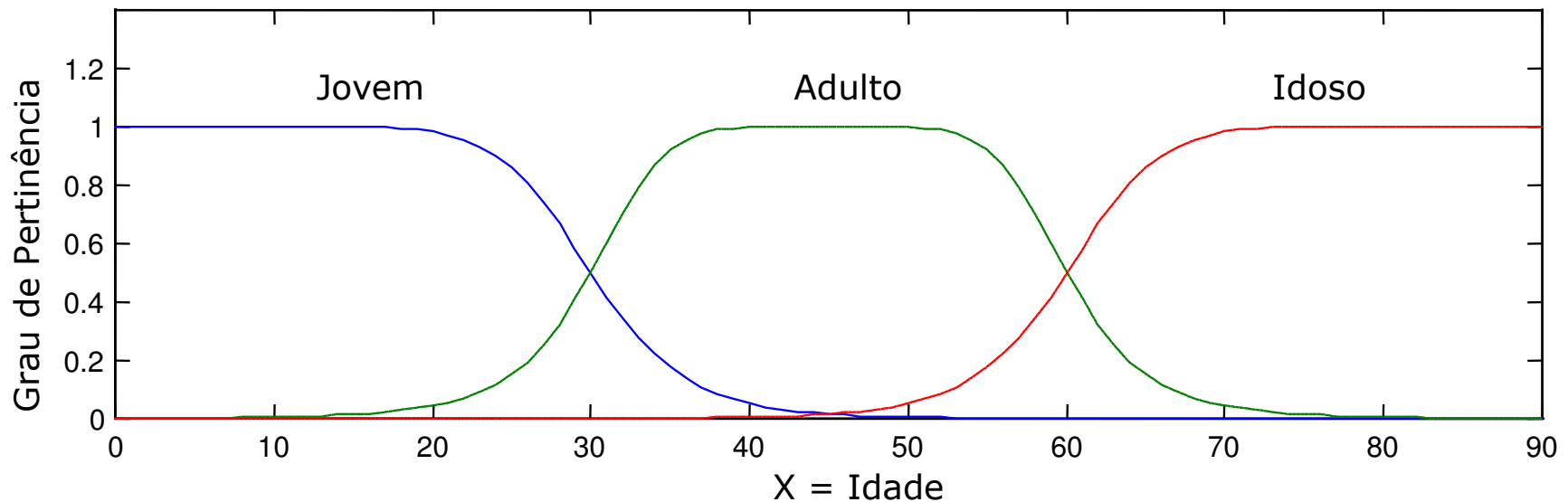
$B =$  "Pessoas com idade em torno de 50 anos"

$B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^2}$$

# Variável Linguística

- É uma partição do universo de discurso  $X$  representando “idade”, formada pelos conjuntos fuzzy “jovem”, “adulto” e “idoso”.



# Variáveis Linguísticas

- Uma variável linguística possui valores que não são números, mas sim palavras ou frases na linguagem natural.
  - Idade = idoso
- Um valor linguístico é um conjunto fuzzy.
- Todos os valores linguísticos formam um conjunto de termos:
  - $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, muito jovem, ...}$   
    Adulto, não adulto, ...  
    Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho...}
- Permitem que a linguagem da modelagem fuzzy expresse a semântica usada por especialistas. Exemplo:

**Se** duração\_do\_projeto == não muito longo **então**  
risco = ligeiramente reduzido

# Operações sobre conjuntos fuzzy

- Uma sentença modificada pela palavra “não” é dita “negação” da sentença original.
  - NÃO-fuzzy( $x$ ) =  $1 - x$
- A palavra “e” é usada para juntar duas sentenças formando uma “conjunção” de duas sentenças.
  - E-fuzzy( $x,y$ ) = Mínimo( $x,y$ )
- De maneira similar a sentença formada ao conectarmos duas sentenças com a palavra “ou” é dita “disjunção” das duas sentenças.
  - OU-fuzzy( $x,y$ ) = Máximo( $x,y$ )

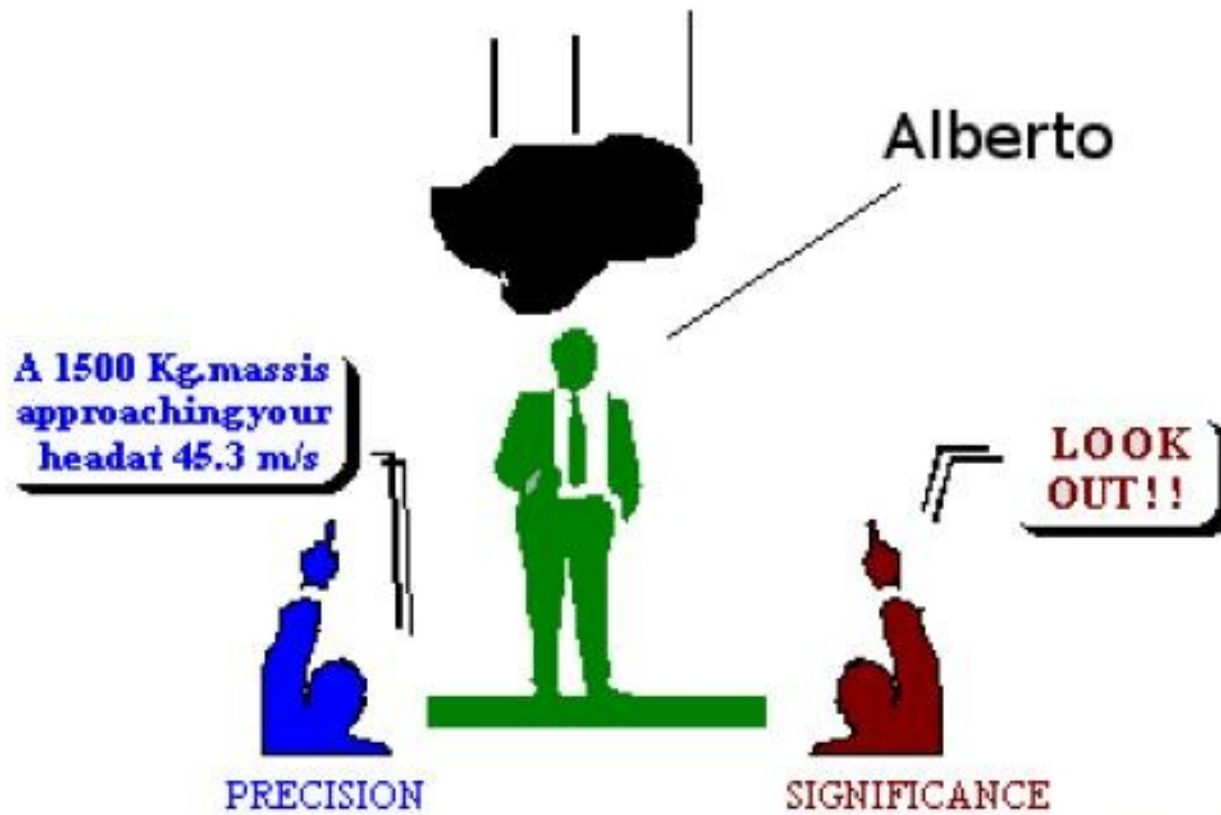
# Operadores Fuzzy

- Suponha que desejássemos representar de forma fuzzy a altura de Alice (1,65 m), Bob (1,75 m), Carlos(2,0m) e Denise(1,45 m). Nossas proposições serão da forma "X é alto", e serão:
  - A = Alice é alta,  $\mu(A)=0,55$
  - B = Bob é alto,  $\mu(B)=0,75$
  - C = Carlos é alto,  $\mu(C) = 1,0$
  - D = Denise é alta,  $\mu(D) = 0,0$
- Usando os operadores fuzzy, podemos escrever sentenças como:
  - Carlos não é alto, NÃO(C),  $\mu(\text{NÃO}(C))= 1,0 - \mu(C) = 0,0$
  - Bob não é alto, NÃO(B),  $\mu(\text{NÃO}(B))= 1,0 - \mu(B) = 0,25$
  - Denise é alta e Alice é Alta, D e A,  $\mu(D \text{ e } A)= \text{mínimo} (\mu(D), \mu(A)) = 0,0$

- A lógica está claramente associada a teoria dos conjuntos. Cada afirmação (do tipo "Carlos é alto") representa na verdade o grau de pertinência de Carlos ao conjunto de pessoas altas.
- Isso permite que conjuntos como "alto" e "baixo" sejam tratados de forma separadas e afirmações como "Carlos é alto 0,75" e "Carlos é baixo 0,5" sejam válidas simultaneamente, ao contrário do que seria esperado em um modelo *crisp*.
- Esse tipo de afirmação é facilmente encontrada na descrição, por humanos, na forma como entendem certo conceito, e a lógica difusa é uma ótima forma de tratar essa forma de incerteza.

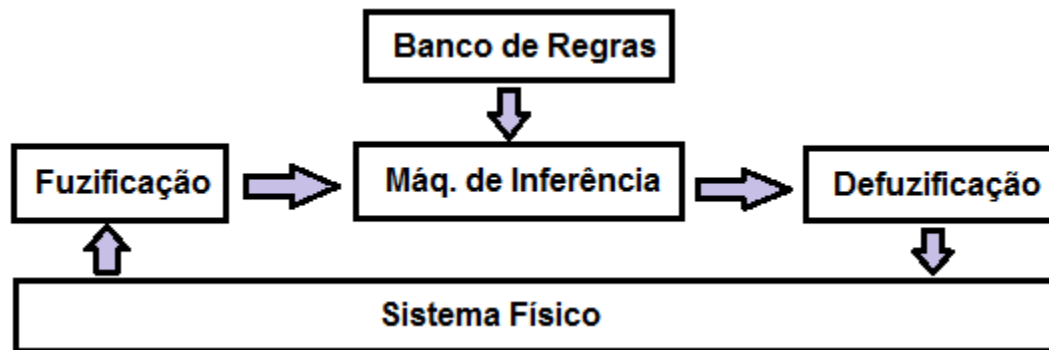
## Funcionamento lógica *Fuzzy*

Lógica *Fuzzy* tem por essência gerar valores de saídas sem a necessidade de entradas precisas.



# Controle Fuzzy

- Sistema de controle fuzzy baseado no modelo de Mamdani.





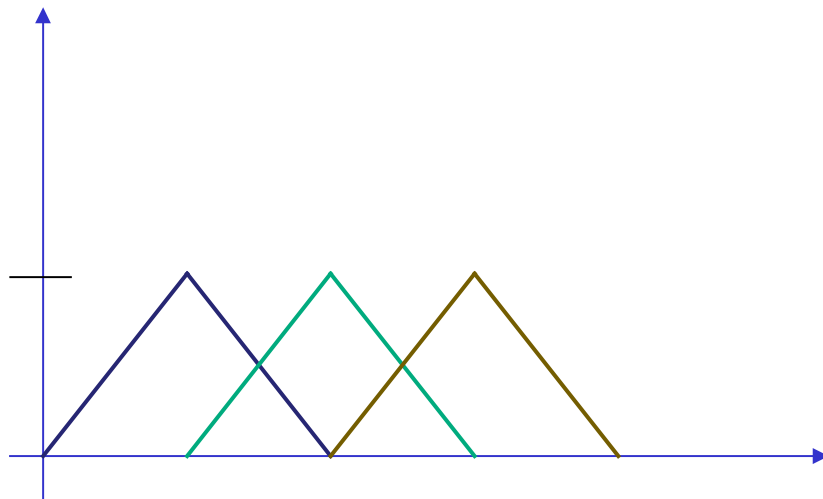
# Componentes de um sistema de controle fuzzy

- Definição das variáveis fuzzy de entrada e de saída: forma e valores das variáveis
- Regras fuzzy
- Técnica de defuzzificação

# Definição das variáveis

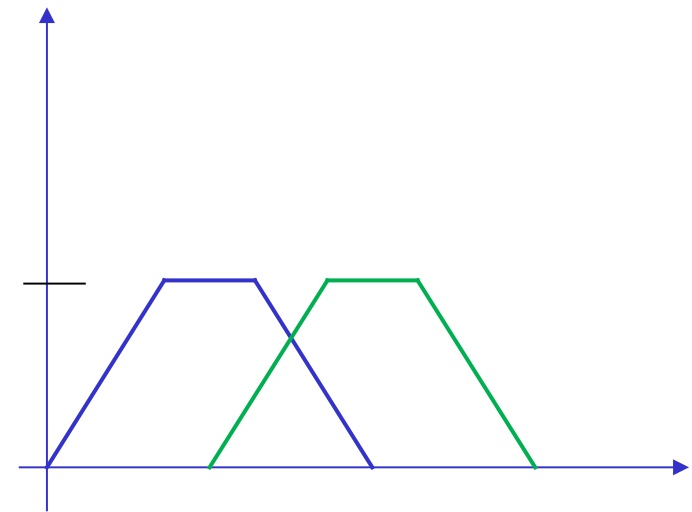
- Etapa na qual as variáveis linguísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência)
- Engloba
  - Análise do Problema
  - Definição das Variáveis
  - Definição das Funções de pertinência
  - Criação das Regiões
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
  - Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, ...

# Exemplos de variáveis fuzzy



Frio Normal Quente

**Temperatura (°C)**



Lento Rápido

**Velocidade(m/s)**

# Regras Fuzzy

SE condição ENTÃO conclusão , mas com variáveis linguísticas (fuzzy)

Exemplo:

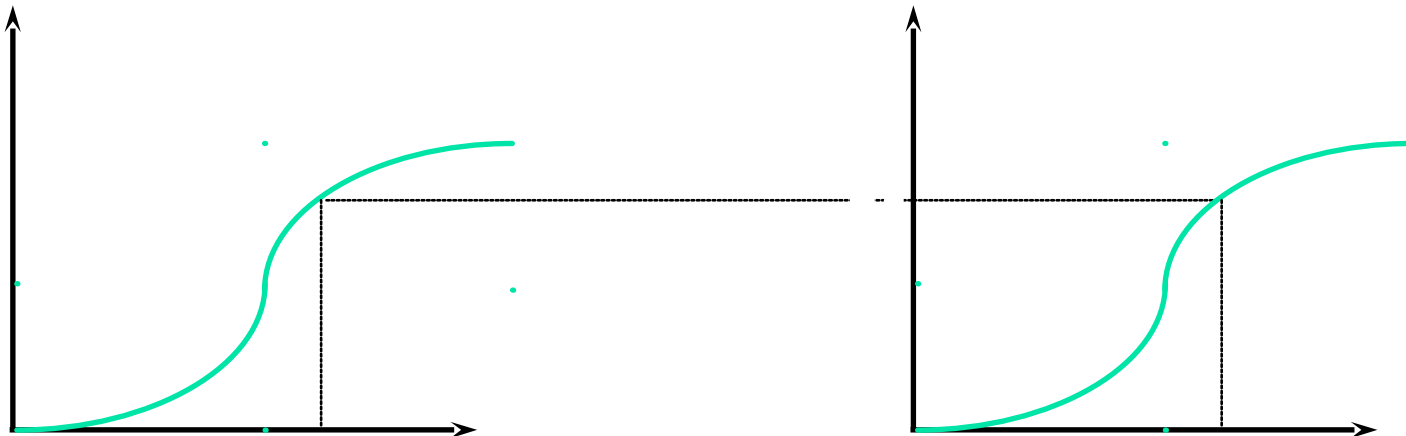
Se a **fruta é verde** então **o gosto é azedo**

Se a **fruta é amarela** então **o gosto é pouco-doce**

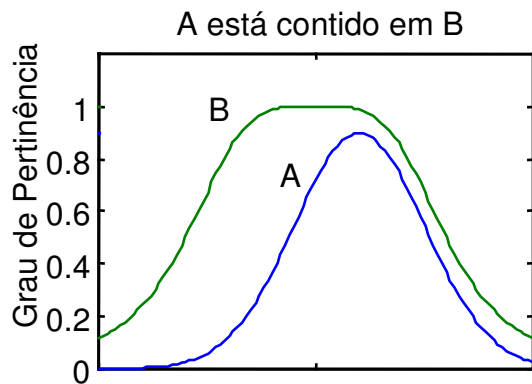
Se a **fruta é vermelha** então **o gosto é doce**

# Regras Fuzzy

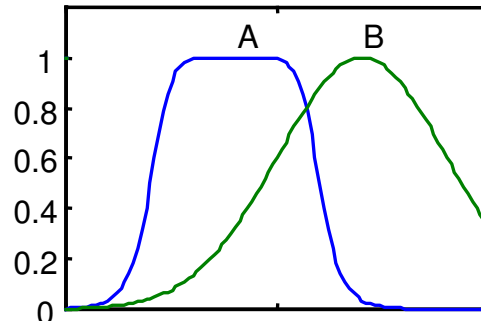
- E o raciocínio?
  - Avaliar o antecedente
  - Aplicar o resultado ao consequente
  - As regras são ativadas parcialmente, dependendo do antecedente
    - Ex: Se a altura é alta, o peso é pesado (altura = 1.85, peso = ?)



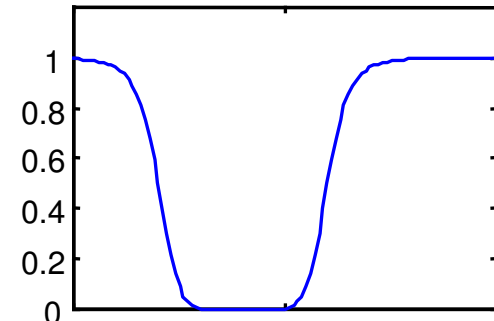
# Operações Básicas



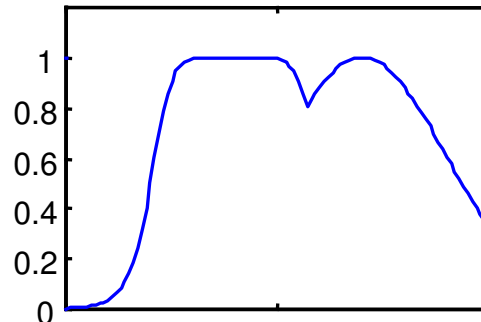
(a) Conjuntos Fuzzy A e B



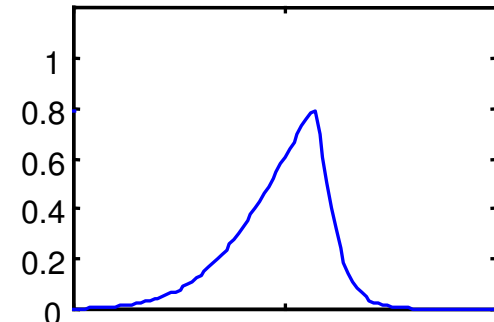
(b) Conjunto Fuzzy não "A"



(c) Conjunto Fuzzy "A ou B"



(d) Conjunto Fuzzy "A e B"



# Exemplo: União e Interseção

- $X = \{a, b, c, d, e\}$ 
  - $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$
  - $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$
- União
  - $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$
- Interseção
  - $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

# Regras - Exemplos

## **Regras CRISP(Não Fuzzy):**

1. Se velocidade  $> 100$  Então  
DPP é 30 metros
2. Se velocidade  $< 40$  Então  
DPP é 10 metros

## **Regras Fuzzy:**

1. Se velocidade é alta Então  
DPP é longa
2. Se velocidade é baixa  
Então DPP é curta

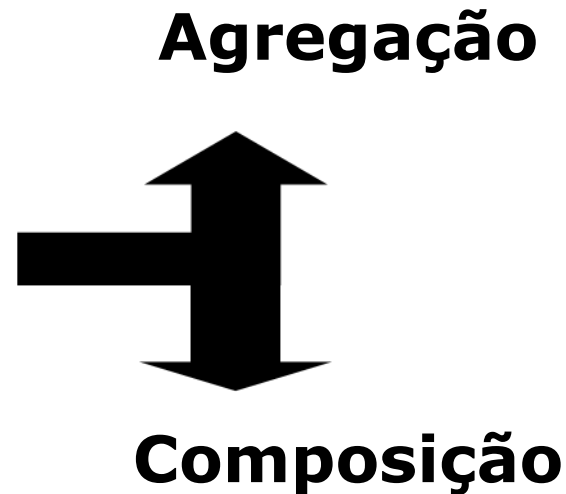


# Etapas do Raciocínio Fuzzy

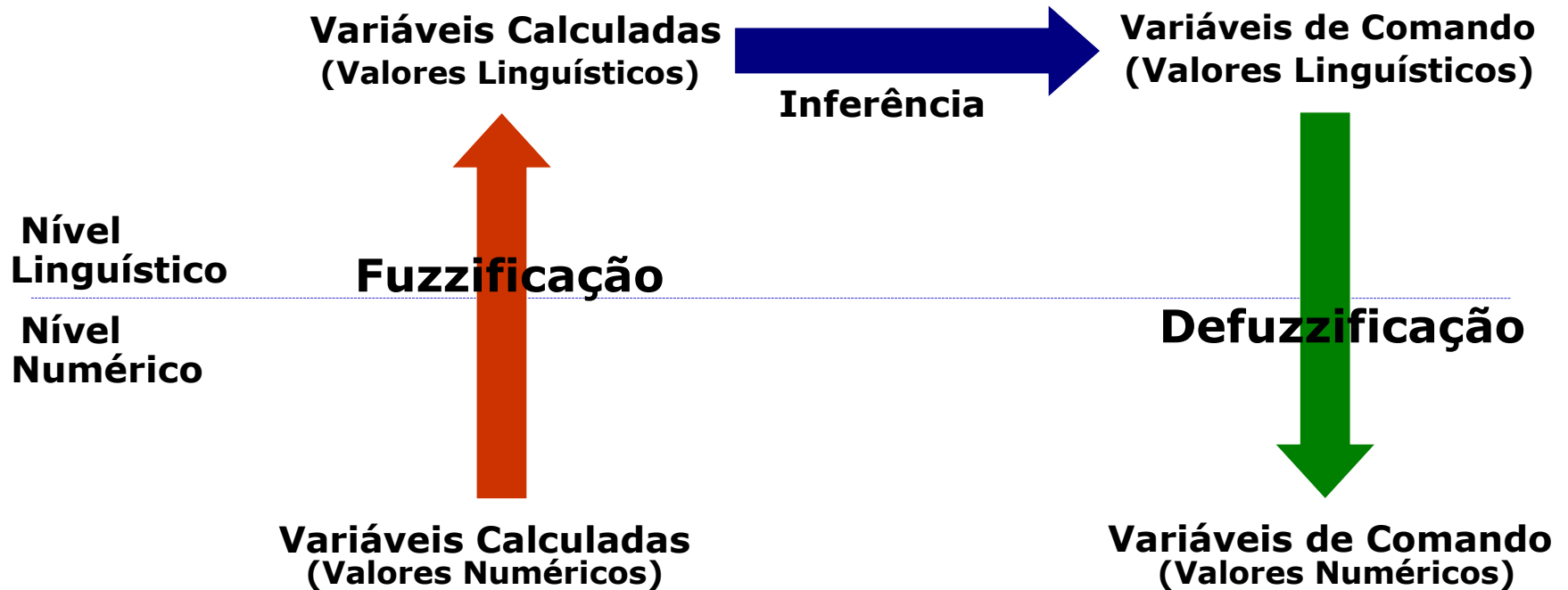
**1ª Fuzzificação**

**2ª Inferência**

**3ª Defuzzificação**



# Etapas do Raciocínio Fuzzy

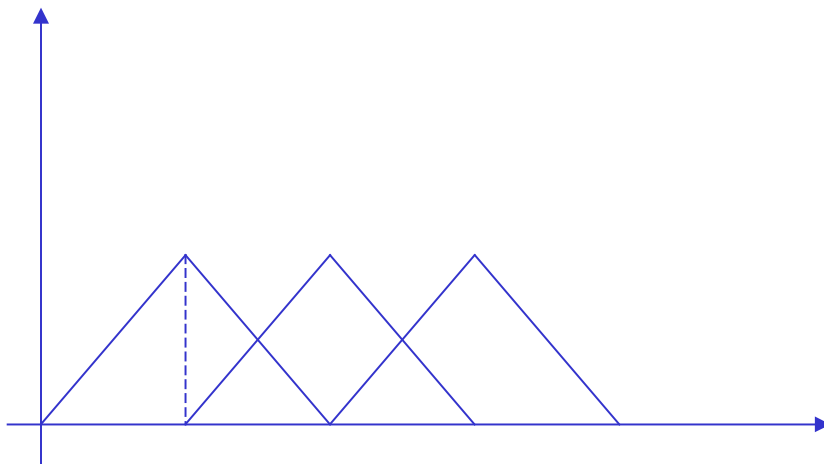


# Fuzzificação

- Etapa na qual as **variáveis linguísticas** e as **funções de pertinência** são definidas de forma subjetiva.
- Engloba
  - Análise do Problema
  - Definição das Variáveis
  - Definição das Funções de pertinência
  - Criação das Regiões
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
  - Triangular, Trapezoidal, ...

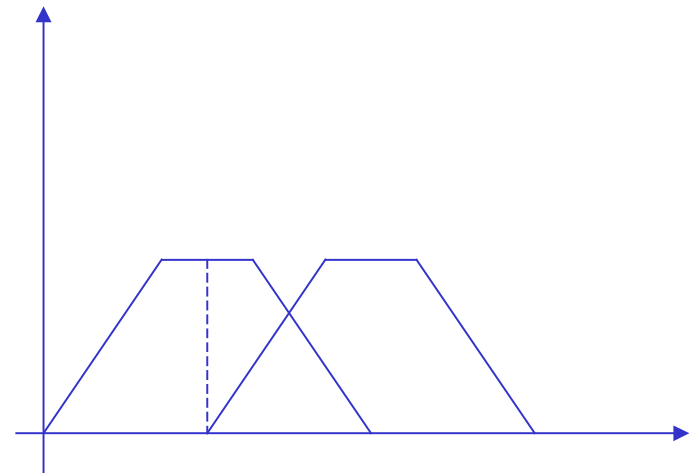
# Fuzzificação

## Triangular



Frio Normal Quente

## Trapezoidal



Lento Rápido

# Inferência Fuzzy

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente
- Engloba:
  - Definição das proposições
  - Análise das Regras
  - Criação da região resultante

# Inferência Fuzzy

- O mecanismo chave do modelo Fuzzy é a proposição.
- A proposição é o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões Fuzzy.
- Na definição das proposições, deve-se trabalhar com:
  - Proposições Condicionais:  
$$\text{Se } W == Z \text{ então } X = Y$$
  - Proposições Não-Condicionais:  
$$X = Y$$

# Inferência Fuzzy

- ❗ **Agregação:** Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente
- ❗ **Composição:** Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída.

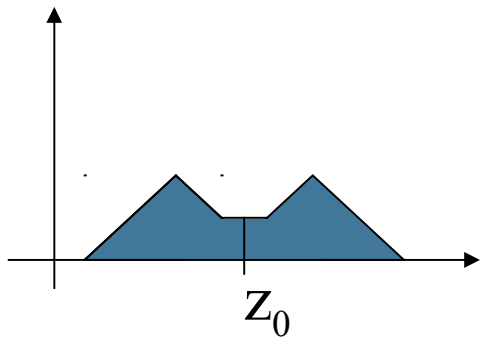
# Defuzzificação

- Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema.
- Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado.
- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
  - Centróide
  - *First-of-Maxima*
  - Middle-of-Maxima
  - Critério Máximo

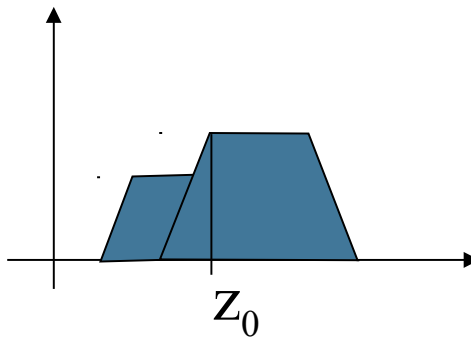


# Defuzzificação

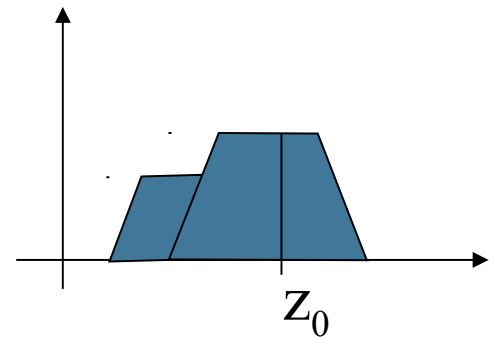
## 💡 Exemplos:



Centróide



First-of-Maxima



Critério Máximo

# Exemplo Inferência Fuzzy

- **Exemplo:**

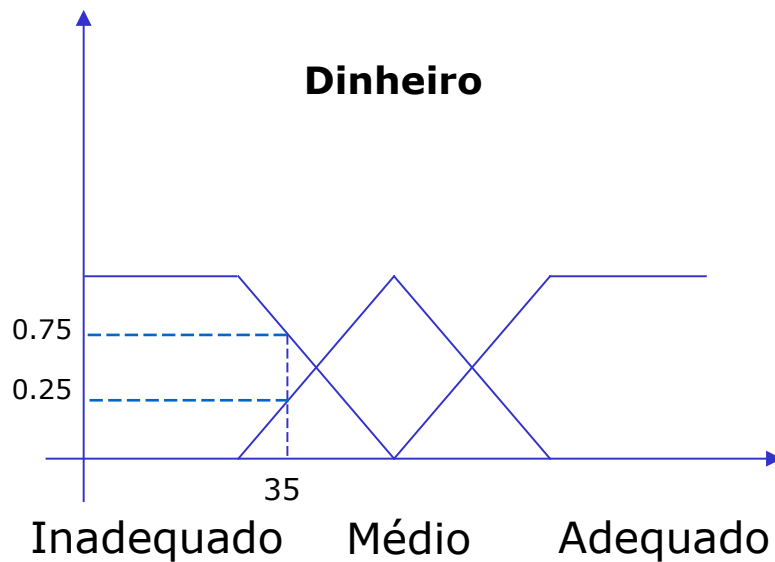
- Um analista de projetos de uma empresa quer determinar o risco de um determinado projeto.
- **Variáveis:** Quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto.

- **Base de conhecimento:**

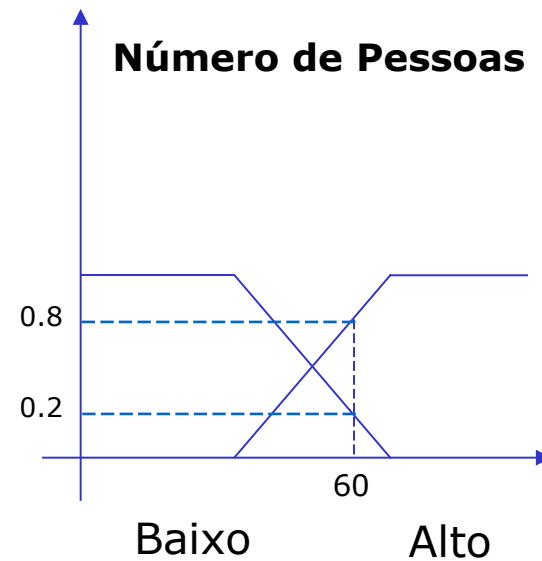
- Se dinheiro é adequado ou o número de pessoas é pequeno então risco é pequeno.
- Se dinheiro é médio e o numero de pessoas é alto, então risco é normal.
- Se dinheiro é inadequado, então risco é alto.

# Exemplo Inferência Fuzzy

## 🔑 Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,25 \wedge \mu_m(d) = 0,75$$



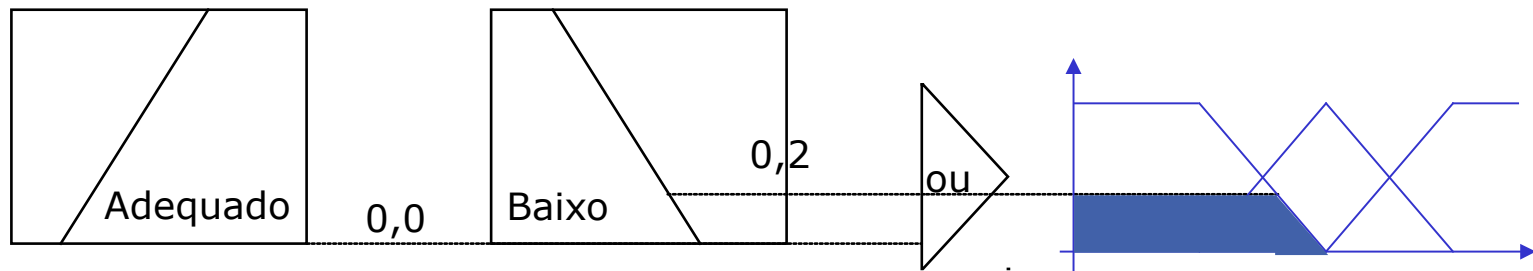
$$\mu_b(p) = 0,2 \wedge \mu_a(p) = 0,8$$

# Exemplo Inferência Fuzzy

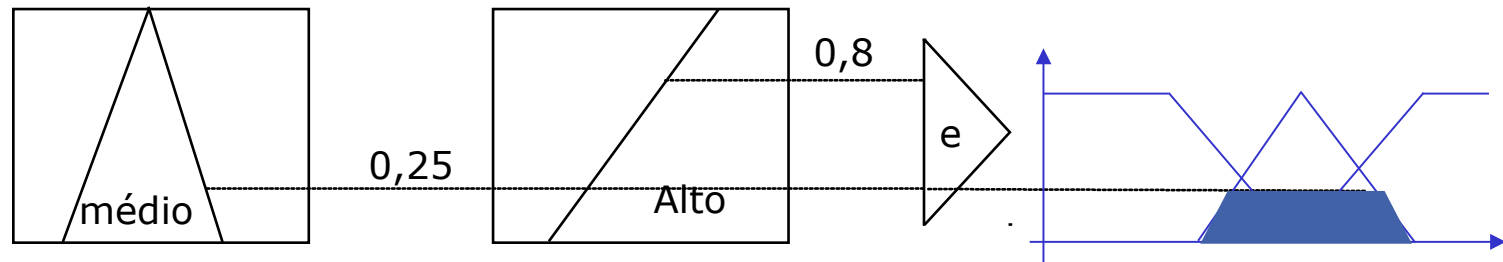
## Passo 2: Avaliação das regras

Ou  $\rightarrow$  máximo e  $\rightarrow$  mínimo

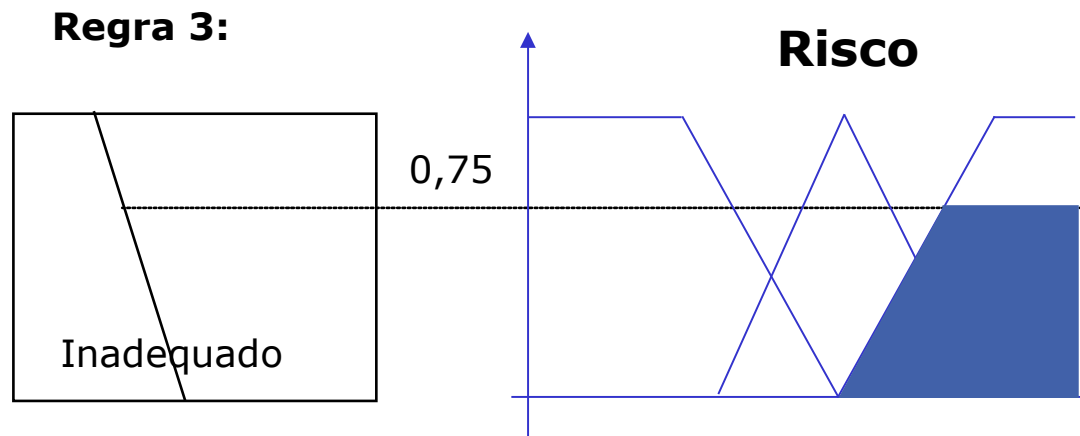
**Regra 1:**



**Regra 2:**

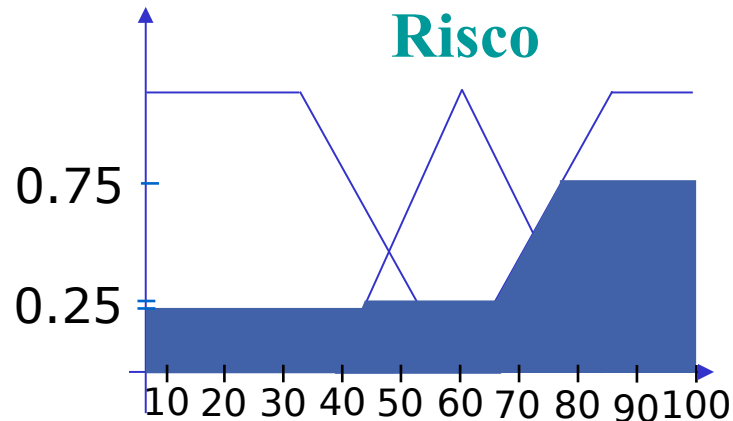


# Exemplo Inferência Fuzzy



# Exemplo Inferência Fuzzy

## 🔗 Passo 3: Defuzzificação



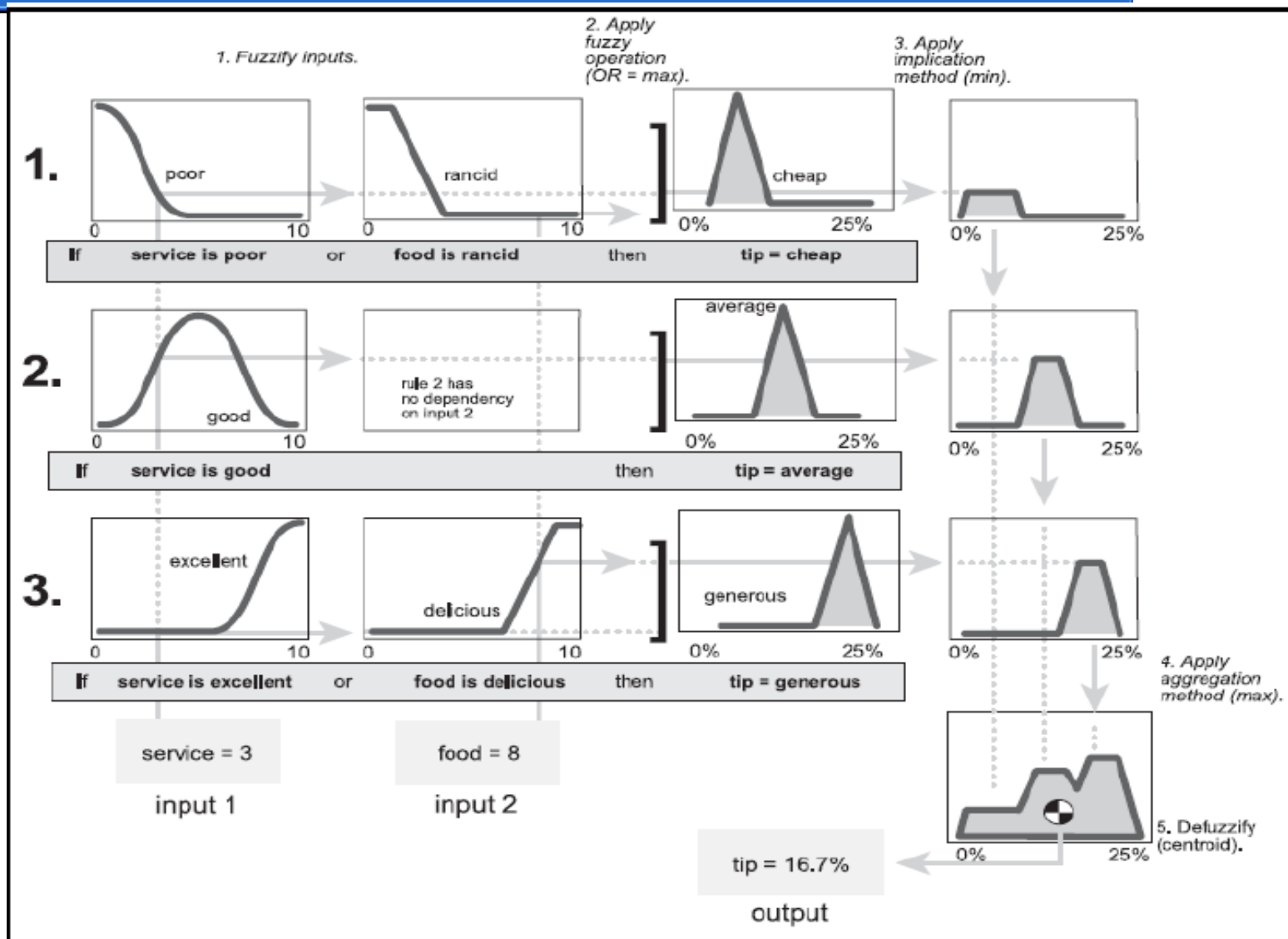
Cálculo do Centróide

$$C = \frac{(10+20+30+40)*0,2+(50+60+70)*0,25+(80+90+100)*0,75}{0,2+0,2+0,2+0,2+0,25+0,25+0,25+0,75+0,75+0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$

# Outro Exemplo

- O sistema tem como objetivo determinar a gorjeta que um cliente deve dar.
- Esse sistema possui três variáveis (serviço, comida e gorjeta).
- As variáveis comida e serviço são variáveis de entrada e gorjeta é a variável de saída.

# Outro Exemplo





# Bibliotecas Fuzzy

- Softwares para auxílio a projeto e implementação de Sistemas Fuzzy:
  - Fuzzy Toolbox do Matlab
  - SciFLT for Scilab (free)
  - X-Fuzzy (free)
  - FuzzyClips (free, API para Java)
  - FLIE (Fuzzy Logic Inference Engine) do Fabro...

- Softwares para auxílio a projeto e implementação de Sistemas Fuzzy:
  - **InFuzzy (desenvolvido na UNISC)**
  - Fuzzy Toolbox do Matlab
  - NEFCON, NEFCLASS e NEFPROX... (desenvolvidos pela Universidade de Magdeburg)
    - disponível para download em
      - <http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/>
      - <http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/wiki/pmwiki.php?n=Forschung.Software>
  - SciFLT for Scilab (free)
  - UnFuzzy (free)
  - FuzzyTech
  - FuzzyClips (free, API para Java)