

RICARDO DUTRA DA SILVA
RODRIGO MINETTO

**Transformadas Wavelets: Teoria e Aplicações
em Análise de Imagens Digitais**

Monografia apresentada ao curso de Ciência da Computação, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a conclusão do curso.

Orientador: Prof. Hélio Pedrini

CURITIBA

2005

SUMÁRIO

LISTAS DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
RESUMO	vii
1 INTRODUÇÃO	1
2 TRABALHOS RELACIONADOS	3
2.1 Transformadas de Sinais	4
2.1.1 Transformada de Fourier	4
2.1.2 Transformada Wavelet Contínua	6
2.1.3 Análise de Multiresolução	7
2.1.4 Wavelets de Haar	10
2.1.5 Transformadas Bidimensionais	11
2.2 Aplicabilidade das Transformadas Wavelet	16
2.2.1 Compressão de Imagens	17
2.2.2 Remoção de Ruído	18
2.2.3 Segmentação de Imagens	19
2.2.4 Análise de Texturas	20
2.2.4.1 Abordagem Espectral	21
2.2.4.2 Transformada de Fourier	22
2.2.4.3 Transformadas Wavelets	22
3 METODOLOGIA DESENVOLVIDA	24
3.1 Segmentação Inicial	25
3.1.1 Medida de Heterogeneidade	26
3.2 Segmentação Final	27

3.2.1	Refinamento Utilizando Espectro de Potência de Fourier	28
3.2.2	Refinamento Utilizando Transformadas Wavelets de Haar e Daubechies	29
4	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	30
4.1	Aplicação do Método em Imagens de Ressonância Magnética	31
4.2	Aplicação do Método em Imagens de Terreno	35
4.3	Comparação entre as Abordagens e Análise dos Resultados	36
5	CONCLUSÕES	41
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42
	APÊNDICE A TRANSFORMADA DE FOURIER	46
A.1	Relação entre os Coeficientes das Séries Reais e Complexas de Fourier	46
B	TRANSFORMADA WAVELET DE HAAR	48
B.1	Soma Máxima nas Sub-Bandas LH, HL e HH	48

LISTA DE FIGURAS

2.1	Funções de escala de Haar que geram V^2	9
2.2	Funções de escala de Haar e Decomposição Wavelet do espaço V^2	10
2.3	Base de Haar	10
2.4	Wavelet de Haar	11
2.5	Transformadas bidimensionais. (a) decomposição em um nível (b) decom- posição em dois níveis.	12
2.6	Decomposição de um nível da imagem Monalisa utilizando o filtro de Haar, onde as sub-bandas de detalhes foram equalizadas para uma melhor visualização.	15
2.7	Transformada bidimensional padrão.	15
2.8	Transformada bidimensional não-padrão.	16
2.9	Exemplos de texturas.	21
3.1	Passos do processo de segmentação.	24
3.2	Efeito de blocagem	26
3.3	Os blocos em branco serão considerados na segmentação final, a percentagem mostrada é a relação entre o total de pixels na cor branca sobre o total de pixels presentes na imagem.	28
4.1	Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 540×540 pixels. A área clara na imagem original indica a presença de tumor.	32
4.2	Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 512×512 pixels. A região escura no lado esquerdo do cérebro, indica que houve um acidente vascular cerebral - AVC.	33
4.3	Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 512×512 pixels. A imagem é de um cérebro normal.	33

- 4.4 Segmentação inicial utilizando transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 512×512 pixels. A região clara no lado direito do cérebro indica a presença de um tumor. 34
- 4.5 Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Daubechies e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 512×512 pixels. No lado direito do cérebro pode-se visualizar uma fratura. 34
- 4.6 Imagem de *Shark Bay, Oeste da Austrália*. Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 420×420 pixels. 35
- 4.7 Imagem de *Moreno Glacier, Argentina*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 340×340 pixels. 36
- 4.8 Imagem de *Baía Chesapeake, MA, Anápolis, USA*. Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 320×320 pixels. 36
- 4.9 Imagem de *Beirute Líbano*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 280×280 pixels. 36
- 4.10 *Costa Krytar, Aden, Yemen*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Daubechies e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 200×200 pixels. 37
- 4.11 Segmentação inicial utilizando a transformada de Haar e as demais abordagens como segmentação final. Imagem composta de 432×432 pixels. 38
- 4.12 Os pixels em branco marcam as diferenças entre as abordagens utilizadas na figura 4.11. (a) diferenças entre a transformada de Haar e Daubechies na segmentação final; (b) diferenças entre a transformada de Haar e o espectro de potência de Fourier; (c) diferenças entre a transformada de Daubechies e do espectro de potência de Fourier para a segmentação final. 38

4.13	Segmentação inicial utilizando a transformada de Daubechies e as demais abordagens como segmentação final. Imagem composta de 432×432 pixels.	39
4.14	Os pixels em branco marcam as diferenças entre as abordagens utilizadas na figura 4.13. (a) diferenças entre a transformada de Daubechies e de Haar para a segmentação final; (b) diferenças entre a transformada de Daubechies e o espectro de potência de Fourier; (c) diferenças entre a transformada de Haar e do espectro de potência de Fourier para a segmentação final.	39
B.1	Transformação wavelet de um nível em um bloco de 4×4 pixels.	48

LISTA DE TABELAS

4.1	Combinações dos métodos empregados na segmentação inicial e final.	30
4.2	Resultados obtidos com a metodologia para imagens médicas.	31
4.3	Resultados obtidos com a metodologia para imagens de terreno.	37
4.4	Tempos de execução para a segmentação inicial e final da imagem 4.11 ou 4.13(a), por meio das abordagens listadas na tabela 4.1.	40

RESUMO

Este trabalho aborda as teorias relacionadas às transformadas wavelets e de Fourier, bem como suas aplicações em processamento de imagens digitais. Dentre as aplicações, é desenvolvido um método de segmentação de imagens que utiliza características extraídas a partir dos coeficientes obtidos pelas transformações. Estas características compõem descritores de texturas. Experimentos são realizados sobre conjuntos de imagens reais para demonstrar a eficiência do método proposto.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda a teoria e aplicações das transformadas wavelets e de Fourier na análise de imagens digitais, dando especial atenção às wavelets, uma abordagem matemática para decomposição hierárquica de funções que vem recentemente adquirindo bastante importância na área de processamento de imagens. Aplicações de wavelets em compressão, remoção de ruído e, com maior profundidade, em segmentação de imagens serão exploradas neste trabalho.

Transformadas exercem um papel importante na análise e interpretação de imagens. Em termos gerais, elas modificam a representação de dados de maneira que estes possam ser mais facilmente analisados. Inicialmente, as imagens estão representadas no domínio espacial. Quando aplicadas, as transformadas de Fourier e wavelets modificam dados inicialmente expressos no domínio do espaço para os domínios de frequência e frequência-espaço, respectivamente.

Neste trabalho pretende-se realizar, de forma consistente, uma revisão sobre a teoria das transformadas e descrever sua utilidade em determinadas aplicações. Demonstra-se, também, que as transformadas wavelets são apropriadas e eficientes para realizar segmentação de imagens digitais. O processo de segmentação de imagens utiliza características de texturas extraídas a partir da representação resultante de transformações sobre a imagem.

Um método de segmentação de imagens será desenvolvido neste trabalho, utilizando a análise de wavelets na extração de características que descrevem cada uma das regiões que compõem as imagens. A segmentação é inicialmente aplicada em blocos, que são agrupados em classes considerando a semelhança entre as características extraídas para a sua representação. Com o objetivo de segmentar com maior precisão regiões de fronteiras entre classes em uma imagem, será proposta uma medida de heterogeneidade que as identificará para posterior refinamento. Esta segmentação, mais acurada, é realizada sobre os blocos hete-

rogêneos utilizando a transformada wavelet ou de Fourier. A eficácia do método proposto é demonstrada através da realização de experimentos sobre várias amostras de imagens digitais, compreendendo imagens reais de ressonância magnética e sensoriamento remoto.

Este trabalho está organizado como segue. O capítulo 2 consiste em uma revisão sobre análise de sinais e transformadas de Fourier e wavelets. Também são apresentadas aplicações das transformadas wavelets em compressão, remoção de ruído e segmentação de imagens digitais. No capítulo 3 é descrita a metodologia proposta para realizar a segmentação de imagens. O capítulo 4 apresenta resultados da aplicação do método de segmentação em imagens de sensoriamento remoto e ressonância magnética.

CAPÍTULO 2

TRABALHOS RELACIONADOS

Neste capítulo são apresentadas duas abordagens utilizadas na análise de sinais e algumas de suas aplicações na área de processamento de imagens. A presença de sinais é percebida nos mais diversos momentos e aplicações, exemplos incluem sinais sísmicos, sinais de rádio, áudio, fala humana, dados financeiros, imagens médicas entre outros.

A transformada de Fourier é uma das mais conhecidas técnicas para processamento e análise de sinais. Baseada no trabalho do matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), esta transformada consiste em expressar uma função como uma soma infinita de séries de senos e cossenos, provendo uma forma de representar no domínio da frequência um sinal inicialmente expresso no domínio do espaço.

As transformadas wavelets apresentam-se como uma alternativa para o processamento de sinais, possuindo propriedades e características que tornam sua utilização propícia em inúmeras áreas de aplicação. Embora conhecida há bastante tempo, a formalização da teoria somente foi realizada recentemente através dos trabalhos de Mallat e Daubechies [6, 18].

A base descrita por Alfréd Haar (1885-1933), em 1909, foi o primeiro sistema ortonormal de funções. O termo *wavelets* é atribuído a Norman Ricker no seu trabalho de sismologia, entretanto, foi introduzido por J. Morlet em seu trabalho mostrando que todo tipo de sinal pode ser analisado em termos de escalas e translações de uma única função. Na área de processamento de imagens, Yves Meyer e Stephane Mallat aplicaram essa idéia em uma teoria chamada de *multiresolução* [19]. Mallat ainda mostrou que a análise de multiresolução pode ser vista como a aplicação de algoritmos de pirâmide, que consistem em realizar médias e diferenciações, recursivamente, sobre uma imagem.

2.1 Transformadas de Sinais

A análise de Fourier é bastante útil para muitos sinais pois o conteúdo da frequência de um sinal é de grande importância. No entanto, ao realizar a transformação para o domínio da frequência, a informação sobre o tempo é perdida. Isto significa que embora seja possível determinar todas as frequências presentes em um sinal, não se sabe exatamente quando elas estão presentes [33].

Essa deficiência não é tão importante para sinais *estacionários*, nos quais as propriedades do sinal não mudam muito como o tempo, porém muitos sinais são *não-estacionários* e possuem características transitórias. A análise de Fourier não é muito adequada para detectar essas transições, que freqüentemente são as partes mais importantes do sinal [20]. Desta forma, para muitas aplicações, além da própria freqüência é necessário conhecer também a sua localização no domínio do tempo.

As transformadas wavelets surgiram como uma abordagem alternativa para o processamento de sinais, cobrindo a deficiência da transformada de Fourier por fornecer informações do sinal nos domínios da freqüência e do tempo [14].

2.1.1 Transformada de Fourier

Em 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier introduziu as séries trigonométricas infinitas, denominadas *séries de Fourier*, em sua homenagem. As *séries de Fourier* mostram que qualquer função periódica, por mais complexa que seja, pode ser representada como uma soma infinita de funções seno e cosseno cuidadosamente escolhidas. Deste modo, tem-se

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (2.1)$$

Se $f(x)$ for uma função L periódica, então têm-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.2)$$

basta tornar $t = 2\pi x/L$ na equação 2.1. Considerando as propriedades de ortogonalidade

entre senos e cossenos, os coeficientes a_n e b_n são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 0, \quad (2.3)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1. \quad (2.4)$$

Pode-se também representar a função $f(x)$ através de uma *série de Fourier complexa*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x / L} \quad (2.5)$$

cujos coeficientes são dados por

$$C_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx \quad (2.6)$$

A relação entre os coeficientes da série real e complexa de Fourier é mostrada no apêndice A.

As decomposições mostradas simplificam a análise das frequências presentes na função $f(x)$. A escolha em representar $f(x)$ por 2.2 ou 2.5 depende da aplicação ou do contexto físico. No estudo de sinais digitais, comunicação de dados e processamento de imagens, é preferível trabalhar com a série complexa. A única restrição em usar essas equações ocorre pelo fato de que $f(x)$ deve ser periódica. Entretanto, caso $f(x)$ seja não periódica, ainda é possível representá-la caso esta tenha um número finito de mínimos e máximos e de descontinuidades em um período (*condições de Dirichlet*) e que seja absolutamente integrável

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (2.7)$$

Da mesma forma que uma função periódica pode ser representada como uma série real ou complexa, pode-se representar uma função não periódica através de uma *integral de Fourier* real ou complexa, sendo a integral de Fourier complexa comumente chamada de *transformada de Fourier*. A integral de Fourier real não será abordada neste trabalho, sua relação com a transformada de Fourier pode ser vista em [26].

A transformada de Fourier contínua pode ser descrita pela equação 2.8, onde $w = 2\pi/L$

é a frequência angular e $i = \sqrt{-1}$.

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iwt) dt \quad (2.8)$$

No contexto de processamento de imagens usa-se a transformada discreta bidimensional de Fourier, cuja aplicação em uma imagem f composta de $n \times n$ pixels é dada pela equação 2.9, com $u, v = 0, \dots, n - 1$.

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(k, l) \exp(-2\pi i(ku + lv)/n) \quad (2.9)$$

2.1.2 Transformada Wavelet Contínua

Com a deficiência de Fourier, a *transformada wavelets*, que objetiva alterar a representação dos dados de modo a permitir que tanto informações sobre frequência quanto informações espaciais estejam presentes, passa a ser amplamente utilizada [16, 19].

Essa transformada decompõe um sinal por meio de uma série de funções elementares, criadas a partir de escalas e translações de uma função base, denominada *wavelet mãe*, mostrada na equação 2.10, onde s guia o escalamento e τ a translação. Normalmente, os valores atribuídos a s e τ são, respectivamente, 2^{-j} e $k2^{-j}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ [23]. A divisão do sinal permite a análise separada de cada uma de suas partes, revelando aspectos locais, como discontinuidades, por exemplo.

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (2.10)$$

A soma sobre todo o tempo de um sinal multiplicado por funções escaladas e transladas da função ψ define a *transformada wavelet contínua* (CWT). Esta gera um conjunto de coeficientes c que representam o sinal na base wavelet ψ , como pode ser visto na equação 2.11.

$$c(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{s,\tau}(t) dt \quad (2.11)$$

A transformada wavelet inversa é dada por

$$f(t) = \int_s \int_\tau c(s, \tau) \psi_{s, \tau}(t) d\tau ds \quad (2.12)$$

As wavelets são funções de suporte compacto, possuindo limitação para o domínio do parâmetro no qual a função é diferente de zero. São também funções oscilatórias cuja integral iguala-se a zero, como pode ser visto na equação 2.13.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.13)$$

2.1.3 Análise de Multiresolução

A análise de multiresolução em wavelets foi formulada em 1986, em trabalhos de Mallat e Meyer [19, 21]. O método consiste em representar funções como um conjunto de coeficientes que fornecem informação sobre a posição e a frequência da função. As resoluções oferecem uma maneira de medir variações locais de uma imagem.

A análise de multiresolução consiste em um conjunto de espaços de aproximação sucessivos V^j , $j \in \mathbb{Z}$, que satisfazem algumas condições. A primeira, mostrada pela equação 2.14, expressa que, ao passar de um espaço de resolução V^j para um espaço V^{j+1} , novos detalhes são acrescentados à aproximação de um sinal. Por outro lado, à medida que uma função $f(x)$ é aproximada por níveis de resolução menores, como por exemplo passando de V^j para V^{j-1} , informação é perdida. A diferença de informação entre duas resoluções de um sinal é chamada de *sinal de detalhe* [23].

$$\dots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset L^2 \quad (2.14)$$

Através de 2.14, tem-se que os espaços são relacionados através de

$$f(t) \in V^j \iff f(2t) \in V^{j+1} \quad (2.15)$$

Cada sub-espaço V^j deve ser gerado através de todas as translações inteiras de uma única

função $f(t)$, verificando-se que

$$f(t) \in V^j \iff f(t - k) \in V^j, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

Como conseqüência das equações 2.15 e 2.16, surge a necessidade de se definir em V^j uma função que desempenha um papel fundamental na análise de multiresolução e na geração de sistemas wavelets. Esta função é denominada *função de escala*, sendo comumente representada na literatura por $\phi(x)$. Deste modo, qualquer função definida em V^j pode ser expressa como combinação linear das funções que constituem a base do sub-espaço V^{j+1} . Em particular pode-se escrever a equação de escala como em 2.17.

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (2.17)$$

A união dos espaços V^j deve ser densa, ou seja, capaz de representar as funções pertencentes ao espaço de funções unidimensionais de quadrado integrável $L^2(\mathbb{R})$.

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.18)$$

Para estes espaços de resolução, a intersecção deve resultar no espaço nulo.

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\} \quad (2.19)$$

A figura 2.1 mostra os espaços V^j para a wavelet de Haar [3].

Observando a relação em 2.14, nota-se que, para passar de um sub-espaço V^j para um sub-espaço V^{j+1} , é necessário aumentar o valor de j para que o tamanho do sub-espaço formado pela função de escala seja estendido. O ideal seria definir um conjunto de funções, representadas na literatura por $\psi(x)$, cujo objetivo é estender as diferenças entre os sub-espaços gerados pela função de escala. Esta função é denominada *função wavelet* e é determinada pela equação 2.20.

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (2.20)$$

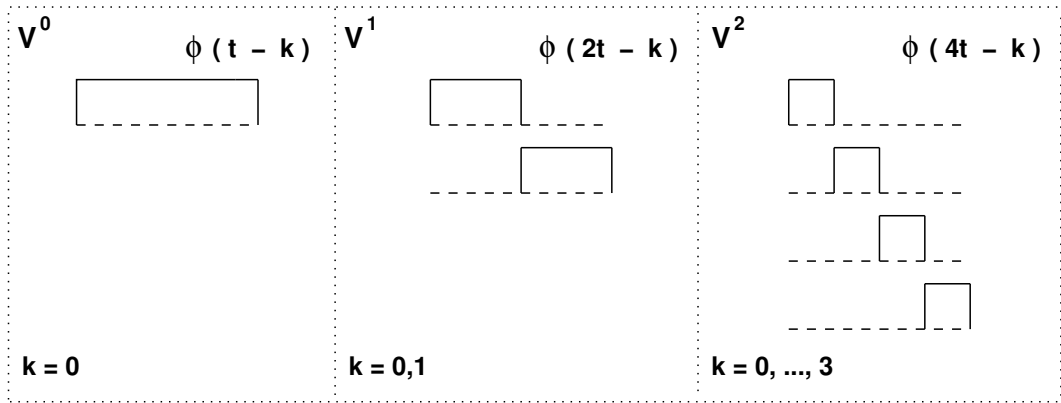


Figura 2.1: Funções de escala de Haar que geram V^2 .

Sabe-se que dois vetores \vec{f} e \vec{g} são *ortogonais* se o *produto interno*, mostrado na equação 2.21, for $\langle \vec{f} | \vec{g} \rangle = 0$. O espaço vetorial W^j formado por todas as funções de V^{j+1} que são ortogonais a todas as funções de V^j , segundo algum produto interno adotado, é chamado *complemento ortogonal* de V^j . Portanto, a partir das funções de escala $\phi(x)$ de V^j e $\psi(x)$ de W^j é possível construir uma base para o espaço V^{j+1} .

$$\langle \vec{f} | \vec{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \quad (2.21)$$

Bases ortogonais são interessantes por permitirem a reconstrução perfeita do sinal original a partir dos coeficientes da transformada. Desta forma, há diversas vantagens em requerer que as funções de escala e de wavelet sejam ortogonais.

Deste modo, utilizando a soma ortogonal (\oplus), pode-se definir por exemplo que

$$V^1 = V^0 \oplus W^0 \quad (2.22)$$

que pode ser estendido para

$$V^2 = V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \quad (2.23)$$

ou seja

$$V^k = V^j \oplus W^j \oplus W^{j+1} \oplus \dots \oplus W^{k-1}, \quad \text{para } k > j \quad (2.24)$$

onde a escala j do espaço inicial é arbitrária. Os passos aqui descritos podem ser observados

na figura 2.2.

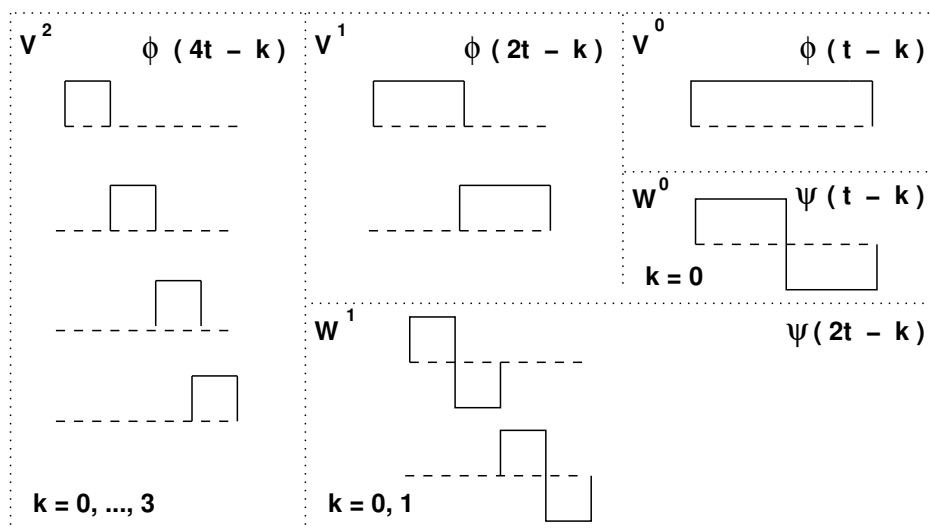


Figura 2.2: Funções de escala de Haar e Decomposição Wavelet do espaço V^2 .

Outra propriedade importante destas bases é a *normalização*. Uma função de base $u(x)$ estará normalizada se o produto interno $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 1$. O coeficiente $2^{j/2}$ nas equações 2.17 e 2.20 é utilizado para obter esta normalização.

2.1.4 Wavelets de Haar

Para um espaço vetorial de funções V^k , a base da wavelet de Haar é definida por

$$\phi_{j,k} = \phi(2^k x - j) \quad j = 0, \dots, 2^k - 1$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A base para o espaço V^2 é mostrada na figura 2.3.

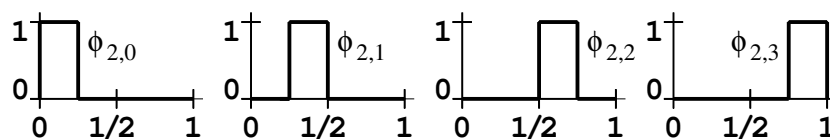


Figura 2.3: Base de Haar

O complemento ortogonal a essa base são as wavelets de Haar, dadas por

$$\psi_{j,k} = \psi(2^j x - k) \quad k = 0, \dots, 2^j - 1$$

onde

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As funções wavelet de Haar para W^1 são mostradas na figura 2.4.

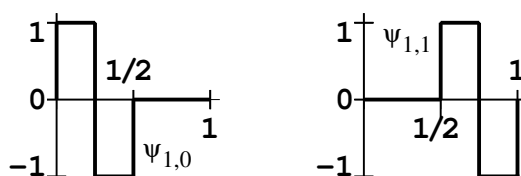


Figura 2.4: Wavelet de Haar

2.1.5 Transformadas Bidimensionais

As transformadas wavelets na área de processamento de imagens são semelhantes a um banco de filtros, constituído de dois filtros l (passa-baixa) e h (passa-alta), chamados de *quadrature mirror filters* (QMF). A aplicação dos QMF sobre a imagem nas direções vertical e horizontal gera um nível de decomposição e produz quatro sub-bandas, LL, LH, HL e HH, como pode ser visto na figura 2.5(a). Este processo pode ser realizado recursivamente na sub-banda LL, figura 2.5(b).

Para a construção dos filtros l e h , funções wavelets são geradas pela função de escala da equação 2.25.

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k l_k \phi(2x - k) \quad (2.25)$$

Esta função gera uma família ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$ [23].

$$\phi_{j,k}(x) = \sqrt{2^{j/2}} \phi(2^j x - k), \quad \text{com } j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.26)$$

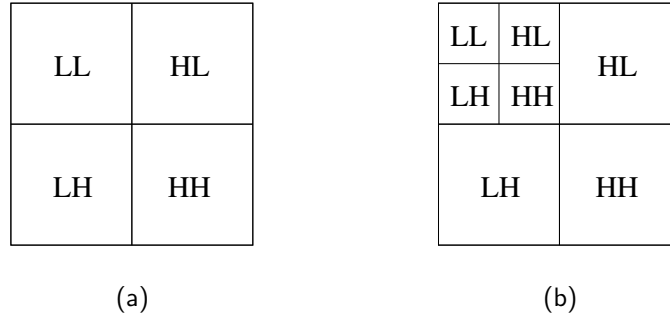


Figura 2.5: Transformadas bidimensionais. (a) decomposição em um nível (b) decomposição em dois níveis.

Nestas condições, a função ψ pode ser obtida de ϕ por

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (2.27)$$

Os filtros l e h são relacionados pela equação 2.28, onde n é o tamanho do sinal.

$$h_k = (-1)^k l_{n-k-1}, \quad k \in 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.28)$$

Os coeficientes de l_k e h_k são dados por

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(2x - k) dx \quad (2.29)$$

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(2x - k) dx \quad (2.30)$$

Estes filtros são utilizados para a construção das wavelets desenvolvidas por Ingrid Daubechies [6], cujos sistemas de wavelets são organizados em diferentes famílias, cada uma das quais caracterizada por um número diferente de coeficientes l_k não nulos. Cada família tem um número (*wavelet number*), denotado por N , que é igual a metade do número de coeficientes do filtro.

Impostas certas restrições aos valores que os coeficientes l_k podem assumir, algumas propriedades para o sistema wavelet são obtidas. Quando se impõe que a função de escala seja

ortonormal a todas as suas translações inteiras, deve-se respeitar a seguinte equação

$$\sum_{n=0}^{2N-1} l_n l_{n+2k} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

Para assegurar que a wavelet tenha N momentos nulos, tem-se que

$$\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k l_{2N-1-k} k^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.32)$$

Quando $N = 1$, têm-se o filtro de *Haar* que é obtido através das equações 2.31 e 2.32, quando $k = 0, \dots, 1$, e que formam o sistema

$$l_0^2 + l_1^2 = 1 \quad (2.33)$$

$$l_0 + l_1 = 0 \quad (2.34)$$

cuja solução leva ao filtro passa-baixa que possui os seguintes coeficientes

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.35)$$

Para se obter o filtro passa-alta deve-se substituir os coeficientes l_k na equação 2.28. Dessa forma, os coeficientes h_k são

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

Da mesma forma é obtido o filtro Daubechies-2, quando $N = 2$. Através da equação 2.31, quando $k = 0, \dots, 3$, chega-se às duas primeiras equações do sistema

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad (2.37)$$

$$l_0 l_2 + l_1 l_3 = 0 \quad (2.38)$$

e, através da equação 2.32, obtêm-se as duas equações restantes

$$l_0 - l_1 + l_2 - l_3 = 0, \quad \text{quando } j = 0 \quad (2.39)$$

$$-l_1 + 2l_2 - 3l_3 = 0, \quad \text{quando } j = 1 \quad (2.40)$$

Resolvendo as equações 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40, são obtidos os seguintes coeficientes do filtro Daubechies-2

$$l_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (2.41)$$

Substituindo os coeficientes l_k na equação 2.28 obtêm-se os seguintes coeficientes h_k

$$h_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_1 = -\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_3 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (2.42)$$

Os filtros l_k e h_k podem ser aplicados através de uma matriz. O produto da matriz dos filtros com os pixels de um dado bloco de uma imagem produz os coeficientes wavelets para este bloco. Na matriz 2.43 é mostrada a aplicação dos filtros para um bloco de imagem de 2×2 pixels, que está representado na forma unidimensional. O produto das duas matrizes produz coeficientes wavelets de média (coeficientes da função de escala), c_i e c_{i+1} , e de detalhe (coeficientes da função wavelet), d_i e d_{i+1} , que são agrupados para visualização ou para uma nova decomposição.

$$\begin{pmatrix} c_i \\ c_{i+1} \\ d_i \\ d_{i+1} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \\ c_{i+1} \\ d_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_0 & l_1 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(i, j) \\ f(i, j+1) \\ f(i+1, j) \\ f(i+1, j+1) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Na figura 2.6, observa-se que a imagem foi dividida em quatro sub-bandas (LL, LH, HL e HH). A sub-banda LL é uma aproximação da imagem original com uma resolução menor, e as sub-bandas LH, HL e HH são imagens de detalhe.

Existem dois métodos para a aplicação dos filtros QMF em imagens, chamados *decom-*

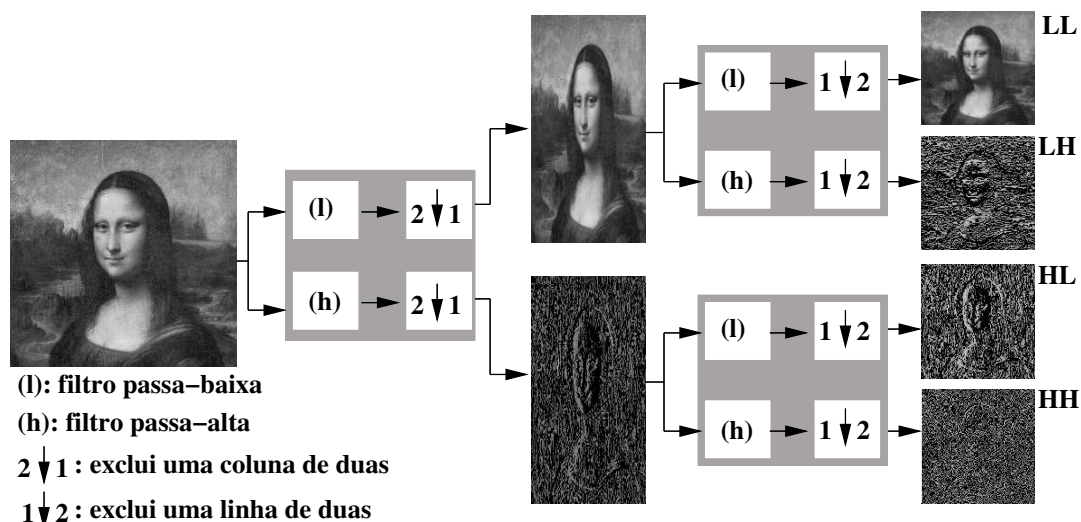


Figura 2.6: Decomposição de um nível da imagem Mona Lisa utilizando o filtro de Haar, onde as sub-bandas de detalhes foram equalizadas para uma melhor visualização.

posição padrão e decomposição não-padrão.

A construção padrão de uma base wavelet bidimensional é conseguida através de todos os produtos tensoriais de uma imagem unidimensional. Na decomposição padrão, aplica-se recursivamente a transformada unidimensional para cada linha da imagem até que reste apenas uma coluna com coeficientes de média e o restante com coeficientes de detalhe. O mesmo processo é aplicado para cada coluna. O resultado é um único coeficiente global de média com o restante dos coeficientes sendo de detalhe. Um exemplo deste método é mostrado na figura 2.7.

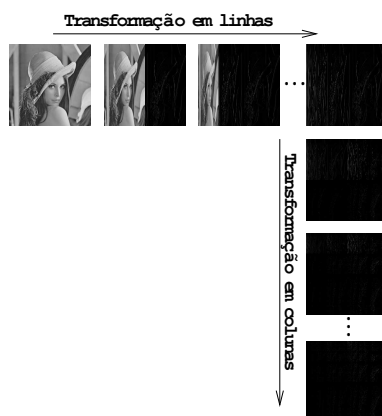


Figura 2.7: Transformada bidimensional padrão.

A decomposição não-padrão é realizada aplicando-se as operações em linhas e colunas

alternadamente até que reste apenas um único coeficiente global de média com o restante dos coeficientes sendo de detalhe. Um exemplo é mostrado na figura 2.8.

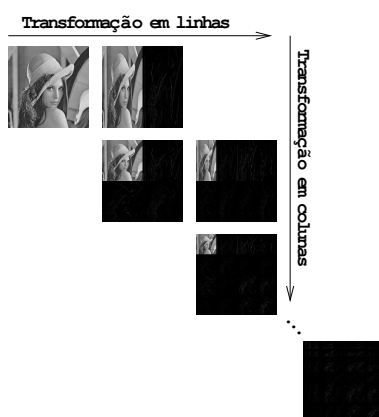


Figura 2.8: Transformada bidimensional não-padrão.

Para a construção não-padrão, uma função de escala para V^j (equação 2.44) e três funções wavelet (equações 2.45) para os espaço W^j , ortogonal a V^j , são definidas [31].

$$\phi\phi_{j,k,l}(x, y) = 2^{-j}\phi\phi(2^{-j}x - k, 2^{-j}x - l) \quad (2.44)$$

$$\phi\psi_{j,k,l}(x, y) = 2^j\phi\psi(2^jx - k, 2^jx - l)$$

$$\psi\phi_{j,k,l}(x, y) = 2^j\psi\phi(2^jx - k, 2^jx - l) \quad (2.45)$$

$$\psi\psi_{j,k,l}(x, y) = 2^j\psi\psi(2^jx - k, 2^jx - l)$$

Neste caso, os índices são definidos como j para a escala, k para a translação horizontal e l para a translação vertical.

2.2 Aplicabilidade das Transformadas Wavelet

Wavelets vêm sendo utilizadas em inúmeras áreas de aplicação, tais como na mecânica de fluidos, computação numérica, análise de imagens, processamento de sinais, fenômenos biológicos, medicina e psicologia. Esta seção descreve três aplicações particulares na área de processamento de imagens.

2.2.1 Compressão de Imagens

Houve um grande crescimento na quantidade de dados que são armazenados, transmitidos e manuseados por computadores, impulsionado principalmente pelos sistemas multi-mídia e pela Internet. Deste fato surgiram diversas técnicas para realizar a compressão de imagens, com o objetivo de tornar essa quantidade de dados mais facilmente manipulável. Um método bastante promissor é o baseado na utilização de wavelets [7].

A transformada de wavelets é uma técnica robusta para compressão de imagens com perda, proporcionando, em razão do aspecto de multiresolução, uma importante capacidade de transmissão progressiva de dados. Algumas de suas características, como independência em relação aos dados, algoritmo rápido e a capacidade de revelar correlações locais, tornam interessante a sua utilização [9].

O algoritmo para compressão de imagens busca, através da transformada wavelet, uma representação dos dados em uma base matemática diferente na qual a maioria dos coeficientes são muito pequenos. Os coeficientes menores que um certo limiar são eliminados e a informação é representada por um número menor de coeficientes [31].

Portanto, a partir de uma imagem expressa como a soma ponderada de funções de base $u_1(x), \dots, u_m(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(x)$$

onde c_1, \dots, c_m representam os coeficientes, procura-se

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{c}_i \hat{u}_i(x)$$

em outra base de funções $\hat{u}_1(x), \dots, \hat{u}_{\hat{m}}(x)$ com coeficientes $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{\hat{m}}$, de forma que o número de coeficientes \hat{m} seja menor que m e que o erro $\left\| f(x) - \hat{f}(x) \right\|$ entre as imagens seja aceitável.

2.2.2 Remoção de Ruído

Durante a aquisição, transmissão ou processamento as imagem podem ser degradadas por ruídos, que são usualmente descritos por suas características probabilísticas.

As transformadas wavelets têm se mostrado ferramentas poderosas para a remoção e atenuação de ruído, devido a sua propriedade de multiresolução. As abordagens wavelets existentes se concentram na remoção de ruídos gaussianos. Donoho e Johnstone [11] e Donoho et al. [12] desenvolveram um método de remoção de ruídos chamado *wavelet shrinkage and thresholding* [11, 12]. O método consiste em realizar a decomposição wavelet sobre a imagem, gerando, através desta, coeficientes de média e de detalhe. Detalhes pequenos podem ser removidos sem afetar substancialmente a estrutura da imagem. Desta forma, coeficientes de detalhe menores que um limiar são zerados, restando apenas os coeficientes que fornecem as informações mais relevantes sobre a imagem. O último passo é a aplicação da transformada wavelet inversa para recuperar a imagem, já com o ruído atenuado. O método desenvolvido é descrito a seguir.

Seja uma imagem livre de ruídos $f(x, y)$ e seja $t(x, y)$ uma imagem corrompida por ruído aditivo gaussiano branco $z(x, y)$. Tal imagem pode ser definida da seguinte forma

$$t(x, y) = f(x, y) + \sigma z(x, y) \quad (2.46)$$

onde $z(x, y)$ tem distribuição normal $N(0, 1)$, para $x = 0, \dots, n$ e $y = 0, \dots, m$, sendo n e m as dimensões da imagem, tal que σ é o desvio padrão do ruído aditivo gaussiano branco.

O método de remoção de ruído possui os seguintes passos:

- a) transforma-se a imagem ruidosa $t(x, y)$ em um domínio ortonormal através da transformada wavelets discreta bidimensional.
- b) limiariza-se os coeficientes wavelets c usando abordagem *soft*, que consiste em zerar coeficientes wavelets de detalhe maiores que um certo limiar

$$c = \begin{cases} c & \text{se } |c| \geq \lambda \\ 0 & \text{se } |c| < \lambda \end{cases}$$

ou *hard*, que consiste em reduzir o valor dos coeficientes wavelets de detalhe maiores que um certo limiar, para que o contorno das imagens ruidosas seja preservado. Tal que

$$c = \begin{cases} c - \text{sgn}(c)\lambda & \text{se } |c| \geq \lambda \\ 0 & \text{se } |c| < \lambda \end{cases}$$

onde sgn é uma função que retorna os seguintes valores

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} 1 & \text{se } c > 0 \\ -1 & \text{se } c < 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \end{cases}$$

- c) aplica-se a transformada wavelet discreta bidimensional inversa em $t(x, y)$ para se obter uma imagem com ruído atenuado.

Um limiar global, tal como mostrado na equação 2.47, pode ser usado para λ de modo a assegurar que todos os coeficientes wavelets puramente ruidosos sejam anulados [10].

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(nm)} \quad (2.47)$$

2.2.3 Segmentação de Imagens

Devido ao crescente avanço nas técnicas de aquisição de imagens em áreas como as de sensoriamento remoto e medicina, possibilitando um aumento significativo na resolução das imagens e no volume dos dados gerados, a análise ou interpretação de imagens torna-se bastante complexa. É crucial a aplicação de um processo intermediário de *segmentação*, o qual efetua a partição do conjunto de dados para produzir estruturas de mais alto nível, correspondentes a objetos ou partes de objetos que auxiliarão a interpretação das imagens [2, 5, 8, 27].

A identificação correta da forma, topologia e localização dos objetos na imagem é um requisito fundamental para que o processo de segmentação possa fornecer informações confiáveis ao sistema de análise de imagens. Entretanto, a etapa de segmentação apresenta-se ainda

como um grande desafio, pois processar uma imagem de modo a segmentar um número de objetos, possivelmente em posições distintas e com diferentes tamanhos e formas, é uma tarefa que apresenta alta complexidade.

Outra tarefa de extrema importância é a definição de um conjunto de características capazes de descrever, de maneira precisa, as regiões presentes nas imagens. Nesse aspecto, métodos de análise de texturas têm apresentado resultados significativos, dentre eles, os métodos baseados na *transformada wavelet* [1, 13], a qual provê simultaneamente informações sobre os domínios espacial e de frequência [4].

A segmentação de texturas pode ser ponto-a-ponto, baseada em pixels, ou em blocos. Na primeira, as características de textura de um pixel são avaliadas sobre sua vizinhança na imagem, formando regiões de textura quando pixels vizinhos possuem características texturais semelhantes. Uma dificuldade deste esquema ocorre quando pixels estão localizados na fronteira entre diversas classes. A abordagem por blocos consiste em extrair características que representam um conjunto de pixels, ou seja, uma região da imagem [30]. Embora a segmentação por blocos seja menos eficiente para a localização de regiões de fronteira, seu custo computacional é bastante inferior.

2.2.4 Análise de Texturas

Para que o processo de segmentação seja efetuado de maneira satisfatória é necessário que as propriedades de cada região da imagem sejam descritas de maneira efetiva. Estas propriedades, chamadas *características*, são elementos que fazem a distinção entre classes de objetos [24]. Entretanto, uma das tarefas mais complexas presentes na análise de imagens está em definir um conjunto de características capazes de efetuar essa descrição.

Dado que a textura encontra-se entre as características utilizadas pelos seres humanos para interpretar informações visuais sobre a distribuição espacial e a variação de luminosidade, além de descrever o arranjo estrutural das superfícies e relações entre regiões vizinhas, a utilização de informações texturais se apresenta como uma abordagem adequada para descrição de regiões da imagem. Exemplos de textura são mostrados na figura 2.9

Embora o sistema visual humano apresente facilidade no reconhecimento e descrição de

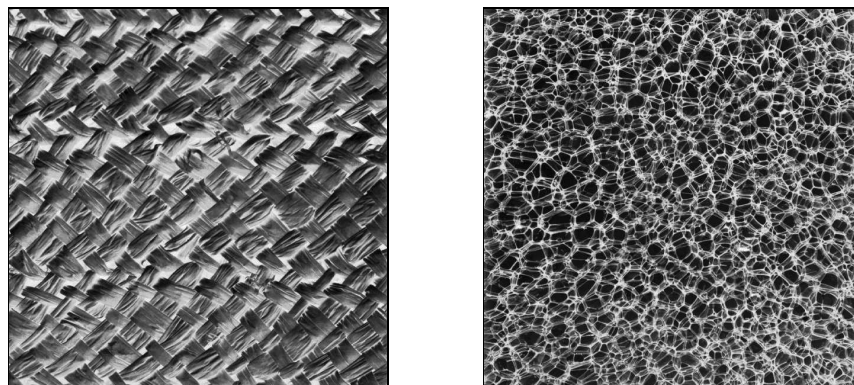


Figura 2.9: Exemplos de texturas.

texturas, é extremamente difícil formalizar sua definição ou desenvolver um conjunto de descritores que possam ser utilizados para análise de imagens em diferentes domínios de aplicações. Tal dificuldade é refletida pela grande quantidade de definições e métodos de análise de texturas encontrados na literatura [28, 29, 32].

Regiões de textura podem conter padrões visuais ou arranjos espaciais de pixels que níveis de cinza ou cores, possivelmente, não descrevem de maneira satisfatória. Normalmente, para a descrição de regiões texturizadas utiliza-se métodos de extração de características, os quais visam obter uma representação simplificada, porém significativa para cada região. Tais métodos são divididos entre as abordagens *espectral*, *estatística* e *estrutural* [25]. Neste trabalho são descritos apenas os métodos baseados na abordagem espectral.

2.2.4.1 Abordagem Espectral

Os métodos de análise de texturas baseados na abordagem espectral extraem descritores a partir da representação obtida após a execução de transformações na imagem de entrada. Dentre os métodos contidos nesta abordagem estão os baseados no espectro de Fourier e na transformada *wavelet*, utilizados neste trabalho e descritos em mais detalhes nas próximas seções.

2.2.4.2 Transformada de Fourier

O espectro resultante da transformada bidimensional de Fourier apresenta grande concentração de energia no centro do plano de freqüências para imagens que possuem componentes de baixa freqüência, enquanto que essa energia fica mais espalhada em imagens que apresentam alta freqüência [15].

Aplicando esses conceitos em texturas, tem-se que o espectro de Fourier para texturas ásperas apresenta concentração de energia no centro do plano, devido à homogeneidade presente nesse tipo de texturas. No entanto, para texturas finas, a energia do espectro encontra-se espalhada pelo plano de freqüências. O espectro de potência de Fourier é utilizado como característica de textura.

Entretanto, quando se utiliza o espectro de Fourier, a informação espacial é perdida, restando apenas informações sobre as freqüências contidas na textura, o que pode acarretar perda na capacidade de descrever as regiões texturizadas.

Da transformada bidimensional de Fourier (equação 2.9), obtém-se o espectro de potência de Fourier, que é utilizado como característica de textura, este é dado pela equação

$$spF = \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1} Re\{\mathcal{F}(u, v)\}^2 + Co\{\mathcal{F}(u, v)\}^2 \quad (2.48)$$

onde Re e Co denotam, respectivamente, as partes real e complexa de $\mathcal{F}(u, v)$.

2.2.4.3 Transformadas Wavelets

A segmentação baseada em transformadas wavelets consiste na aquisição de características, a partir dos coeficientes da transformada, que descrevem uma textura.

Ao final do processo de decomposição a imagem encontra-se dividida em sub-bandas que apresentam escala e freqüência distintas. Utilizando-se apenas um nível de decomposição, portanto, são obtidas quatro sub-bandas, conforme já mostrado na figura 2.5, onde LL e HH denotam, respectivamente, as freqüências baixas e altas, enquanto LH e HL descrevem as freqüências intermediárias presentes na imagem de entrada.

Para cada uma das sub-bandas resultantes é possível extrair uma característica que descreve

sua energia. Tal característica é mostrada na equação 2.49, onde Sb denota uma das bandas LL, LH, HL, HH, e $a(x, y)$ representa o coeficiente da transformada na coordenada (x, y) , obtido a partir de uma das sub-bandas, as quais são compostas de m pixels cada.

$$F_{Sb} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum a(x, y)^2} \quad (2.49)$$

No domínio das wavelets, coeficientes de alta frequência evidenciam mudanças bruscas de intensidade na imagem. As sub-bandas LH, HL e HH são as componentes de alta frequência da transformada e apresentam, respectivamente, sensibilidade às texturas nas direções vertical, horizontal e diagonal.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DESENVOLVIDA

A segmentação baseia-se na identificação de regiões em uma imagem que possui características uniformes. O método de segmentação desenvolvido (inicialmente proposto em [22]) é composto de duas etapas, segmentação inicial e final, como pode ser visto na figura 3.1. A segmentação inicial é aplicada sobre blocos contidos na imagem, agrupando, em classes, aqueles que não possuem fronteiras entre texturas, e identificando os que estão presentes nas transições entre as classes para que, posteriormente, uma segmentação mais fina seja efetuada sobre eles. Na segmentação final, que visa eliminar o efeito de blocagem, efetua-se uma segmentação ponto-a-ponto sobre os pixels contidos nas regiões de fronteira, determinados durante a primeira etapa.

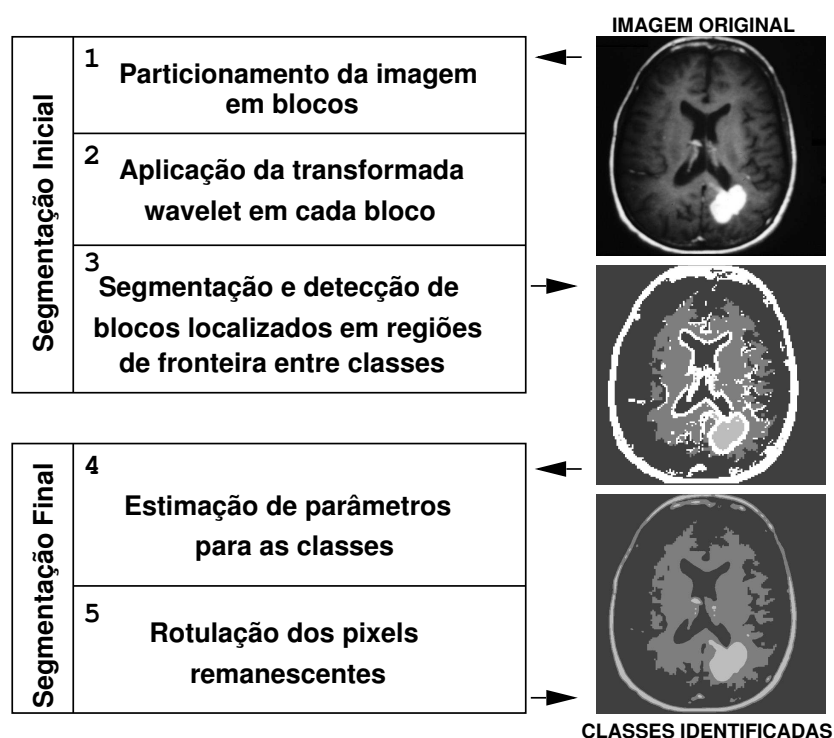


Figura 3.1: Passos do processo de segmentação.

Como nem sempre informações prévias sobre as imagens encontram-se disponíveis, o

método é modelado de modo a extrair as informações necessárias diretamente da imagem a ser segmentada, reduzindo, de maneira significativa, a necessidade de intervenção humana durante seu processamento. Esta é uma característica bastante desejável em virtude do grande volume de dados manipulado.

3.1 Segmentação Inicial

A segmentação inicial consiste em particionar a imagem de entrada, com dimensões $N \times M$, em blocos de tamanho $T \times T$, onde T é múltiplo de N e M .

Para cada um dos q blocos que compõem a imagem, tratados como regiões de textura, aplica-se a transformada *wavelet* e, pelos seus coeficientes, utilizando a equação 2.49, extraem-se as características que representam a energia das sub-bandas LL, LH, HL e HH (passos 1 e 2 do diagrama na figura 3.1) [17].

Como não se utiliza dados obtidos previamente, cada classe presente na imagem deve ser caracterizada por meio de informações extraídas durante o processo de segmentação. Dessa maneira, com intuito de efetuar tal caracterização, aplica-se um processo iterativo para determinar os parâmetros que representam cada uma das classes presentes na imagem. Nesse processo, os blocos que apresentam características semelhantes são agrupados.

Inicialmente, o primeiro bloco, b_1 , é considerado como representante da classe 1 e acrescentado no conjunto c_1 , cujas características iniciais são iguais às do bloco b_1 . Para os demais blocos, calcula-se a distância Euclidiana entre as suas características e as dos representantes das classes já existentes. Se a menor distância encontrada entre o i -ésimo bloco e a j -ésima classe for menor que um limiar L , b_i pertence a esta região de textura e passa a compor o conjunto c_j , caso contrário, cria-se a classe $j + 1$ e considera-se os parâmetros de b_i como seu representante inicial.

Os parâmetros que representam cada classe são atualizados quando um novo elemento é inserido nos conjuntos c . Esta atualização é realizada fazendo-se uma média ponderada entre as características atuais da classe e as características do novo componente da classe, conforme mostra a equação 3.1, onde f_{sb}^j denota a energia para a sub-banda sb , representando a j -ésima

classe, e t denota o número de elementos contidos no conjunto c_j .

$$f_{sb}^j = \frac{1}{t} \sum_{k \in c_j} F_{sb}^k \quad (3.1)$$

A extração de características utilizando blocos torna a identificação de fronteiras entre classes pouco precisa, produzindo um efeito de blocagem, como mostrado na figura 3.2. Os blocos localizados nessas regiões são detectados e retirados dos conjuntos c (passo 3 do diagrama na figura 3.1). Os blocos que não forem excluídos são considerados como segmentados, desta maneira, apenas uma pequena parte da imagem deve ser reconsiderada na etapa final da segmentação.



Figura 3.2: Efeito de blocagem

3.1.1 Medida de Heterogeneidade

Os coeficientes wavelets nas sub-bandas de detalhe (LH, HL e HH) medem as flutuações locais dos valores dos pixels em uma dada escala.

Em regiões homogêneas ou de suavidade, onde os pixels são iguais ou muito próximos, temos que os coeficientes wavelets das sub-bandas LH, HL e HH são nulos ou desprezíveis, isto se deve à correlação local no espaço, fator presente em uma imagem real. O inverso

acontece em regiões de fronteira entre texturas e contornos, onde os pixels da imagem possuem valores bastante variados e assim tem-se coeficientes wavelets consideráveis que evidenciam estas transições.

Devido aos fatos mencionados, é possível usar os coeficientes wavelets de detalhe para caracterizar uma função localmente, bem como localizar contornos e regiões de fronteira entre texturas.

Essa localização se dá por meio da medida de heterogeneidade w_i , proposta neste trabalho, para a localização das regiões de fronteira entre diferentes texturas, e apresentada na equação 3.2, onde $a(x, y)$ representa o coeficiente da transformada na coordenada x, y no i -ésimo bloco, e nrl é usado para normalizar a medida de heterogeneidade entre zero e um. O valor de nrl , para a transformada de Haar, é estimado conforme detalhes no apêndice B. Para a transformada de Daubechies o valor de nrl é determinado experimentalmente.

$$w_i = \frac{\sum_{LH} |a(x, y)| + \sum_{HL} |a(x, y)| + \sum_{HH} |a(x, y)|}{nrl} \quad (3.2)$$

Caso w_i seja maior que um limiar determinado experimentalmente, o i -ésimo bloco é excluído do conjunto de classes e os pixels que o compõem devem ser considerados durante a etapa de segmentação final.

A figura 3.3 mostra os blocos localizados através do coeficiente de heterogeneidade para diferentes percentagens em relação ao total de pixels presentes na imagem.

3.2 Segmentação Final

A segmentação final é uma etapa de refinamento ponto-a-ponto, que determina à qual classe deve pertencer cada pixel contido nos blocos excluídos dos conjuntos c durante a segmentação inicial. Para esta segmentação foram utilizadas três abordagens: espectro de potência de Fourier, transformada wavelet de Haar e transformada wavelet de Daubechies. As próximas seções descrevem essas abordagens.

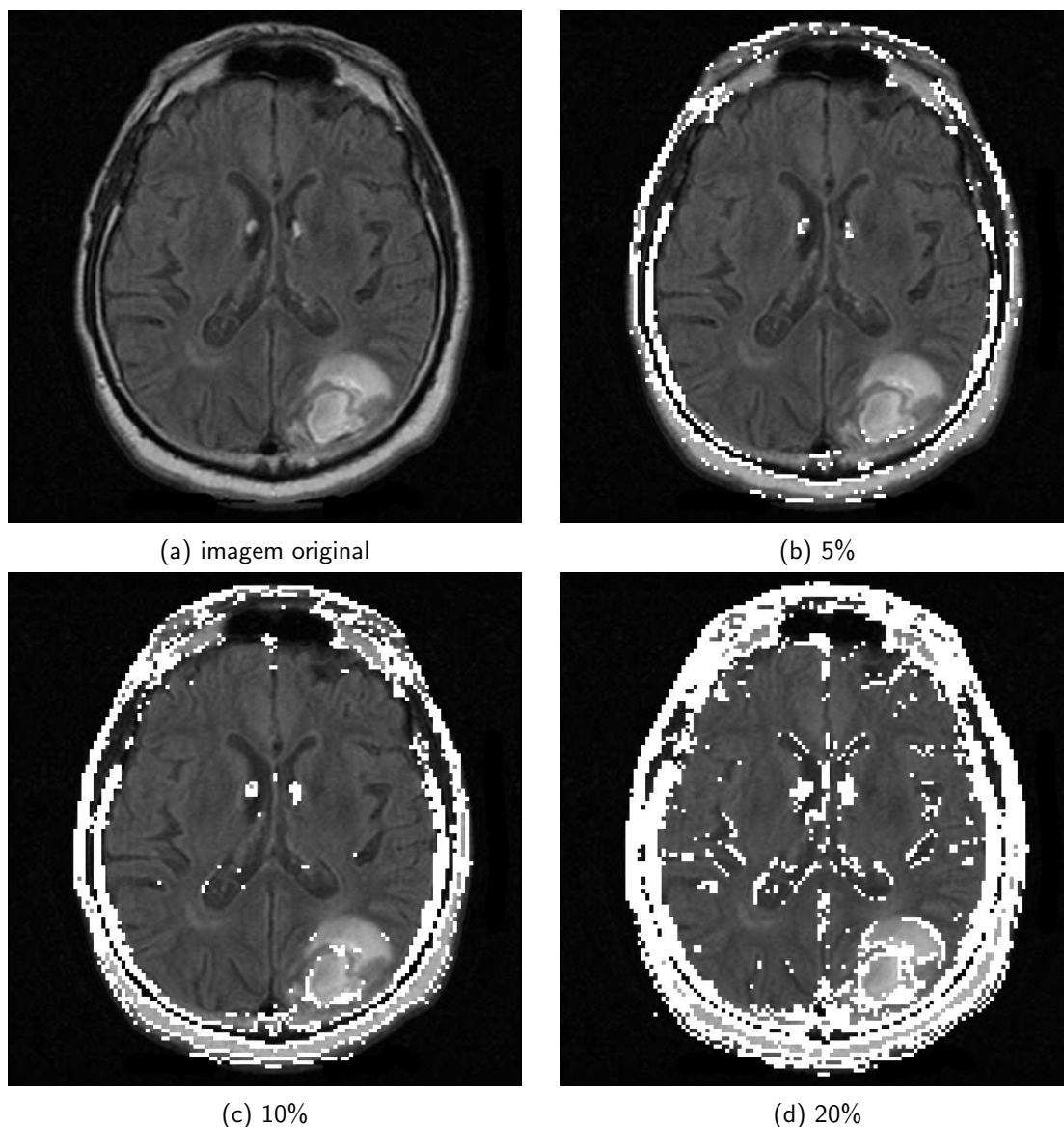


Figura 3.3: Os blocos em branco serão considerados na segmentação final, a porcentagem mostrada é a relação entre o total de pixels na cor branca sobre o total de pixels presentes na imagem.

3.2.1 Refinamento Utilizando Espectro de Potência de Fourier

Uma medida obtida a partir do espectro de potência de Fourier, definido na equação 2.48, é usada para determinar à qual classe deve pertencer cada pixel contido nos blocos excluídos dos conjuntos c . Obtém-se tal medida, denominada medida do espectro de potência de Fourier, através da média de todos os componentes do espectro de potência de Fourier.

Inicialmente, os parâmetros que representam cada classe devem ser estimados (passo 4 do diagrama na figura 3.1), para isso, utiliza-se o valor médio das medidas do espectro de potência de Fourier calculado para todos os blocos contidos em cada classe definida durante

a segmentação inicial.

Após a estimação dos parâmetros, os pixels localizados nos blocos excluídos dos conjuntos c , ou seja, aqueles situados em regiões de fronteira, são rotulados como pertencentes a uma das classes (passo 5 do diagrama na figura 3.1). Amostra-se uma janela centrada em cada um desses pixels e determina-se a medida do espectro de potência de Fourier.

Finalmente, atribui-se o pixel em questão à classe cuja distância Euclidiana entre as medidas da classe e dessa janela seja mínima.

3.2.2 Refinamento Utilizando Transformadas Wavelets de Haar e Daubechies

Como no processo descrito para o espectro de potência de Fourier, o refinamento com transformadas wavelets é utilizado para determinar a classe à qual pertence cada pixel contido nos blocos excluídos dos conjuntos c , durante a segmentação inicial.

Inicialmente, uma janela é centrada em cada pixel do bloco de fronteira e, sobre ela, calcula-se a transformada wavelet. Como na segmentação inicial, características de energia para as sub-bandas da transformada são adquiridas para representar o pixel.

Atribui-se o pixel à classe com menor distância Euclidiana entre as características de energia das classes e da janela centrada sobre o pixel.

A segmentação de imagens utilizando wavelets na segmentação inicial e final é interessante pois demonstra que estas transformadas são capazes de realizar uma segmentação eficiente e precisa.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Este capítulo descreve os resultados obtidos pela aplicação do método de segmentação em imagens reais. As imagens escolhidas pertencem a duas diferentes áreas de aplicação, medicina e sensoriamento remoto.

Na área da medicina foram realizados testes em imagens de ressonância magnética e na área de sensoriamento remoto foram realizados testes com imagens de terrenos. As combinações de métodos utilizados para realizar a segmentação inicial e final podem ser visualizadas na tabela 4.1.

O tamanho do bloco utilizado na segmentação é mínimo de forma a preservar os detalhes. Para todas as imagens foram utilizados blocos de tamanho 4×4 pixels.

Sendo que o valor do limiar L foi determinado de acordo com o número de classes desejadas.

Segmentação Inicial	Segmentação Final
Haar	Haar
	Daubechies
	Espectro de Potência de Fourier
Daubechies	Haar
	Daubechies
	Espectro de Potência de Fourier

Tabela 4.1: Combinações dos métodos empregados na segmentação inicial e final.

Os experimentos foram executados em um microcomputador AMD ATHLON 2200 XP+ com 256 megabytes de memória RAM, utilizando linguagem de programação C em ambiente Linux.

4.1 Aplicação do Método em Imagens de Ressonância Magnética

O imageamento por ressonância magnética é requerido quando delineações suaves dos tecidos são necessárias. A segmentação de imagens é uma abordagem que tem sido aplicada a imagens de ressonância magnética para diferenciar tipos de tecidos, tumores e acidentes vasculares cerebrais, para propósitos de cálculo de volume e visualização. A tarefa de classificar este tipo de imagem é complexa, devido ao nível de detalhes presentes no cérebro humano.

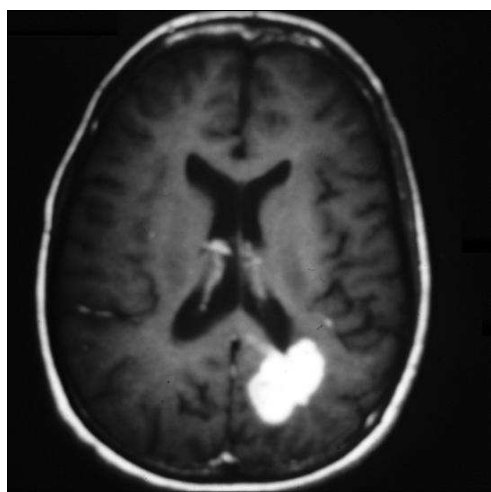
Através de cortes transversais são geradas inúmeras imagens de ressonância magnética para representar o volume de um cérebro. Os experimentos foram realizados com imagens de pacientes diferentes, sendo que as amostras possuem cérebros com tumor, acidente vascular cerebral, fraturas e normais. As imagens utilizadas são cortesia do *Centro de Tomografia Computadorizada e Ressonância Magnética (CETAC)*, Curitiba-PR.

As figuras 4.1 a 4.5 mostram os resultados obtidos com a aplicação do método de segmentação proposto. No caso da figura 4.1, são apresentadas imagens intermediárias resultantes da segmentação inicial e final. Esta última foi realizada apenas sobre os blocos localizados em regiões de fronteira.

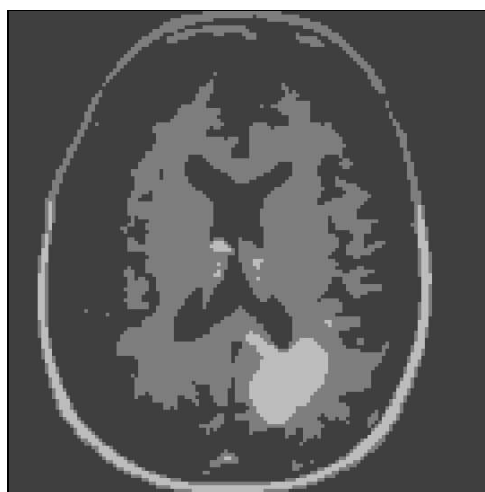
A tabela 4.2 mostra a percentagem de pixels em relação ao total existente na imagem que foram segmentados na etapa final. O tempo da segmentação final da figura 4.5 foi elevado pois não utilizou-se a transformada rápida de Fourier.

Imagens	Pixels Segmentados na Etapa Final (%)	Tempo de CPU (s)	
		1ª Etapa	2ª Etapa
Figura 4.1	17.72	0.06	0.16
Figura 4.2	31.61	0.06	0.30
Figura 4.4	41.68	0.06	0.51
Figura 4.3	47.07	0.06	0.45
Figura 4.5	22.07	0.08	1.65

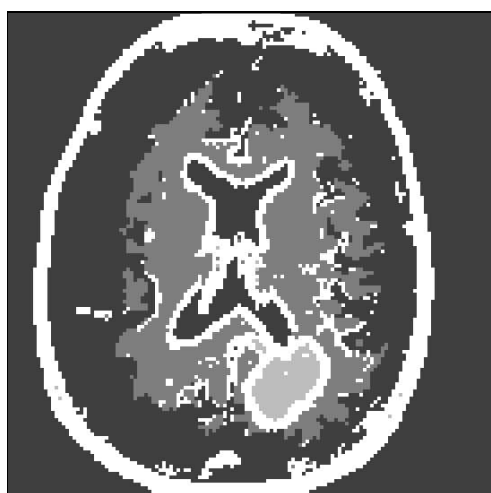
Tabela 4.2: Resultados obtidos com a metodologia para imagens médicas.



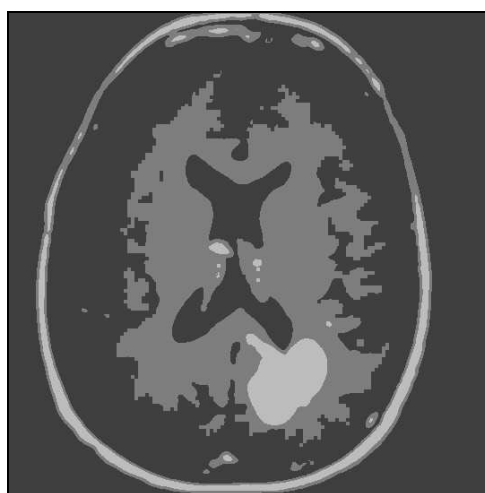
(a) imagem original



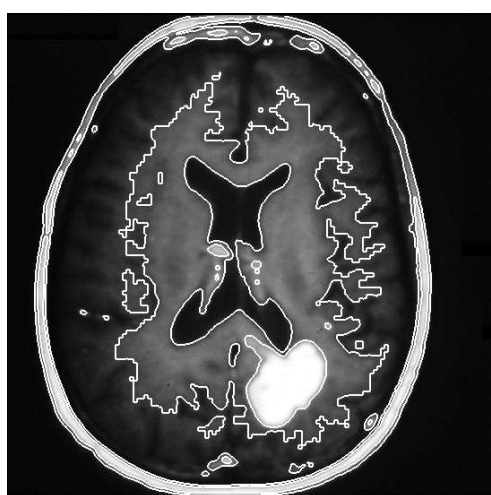
(b) segmentação inicial



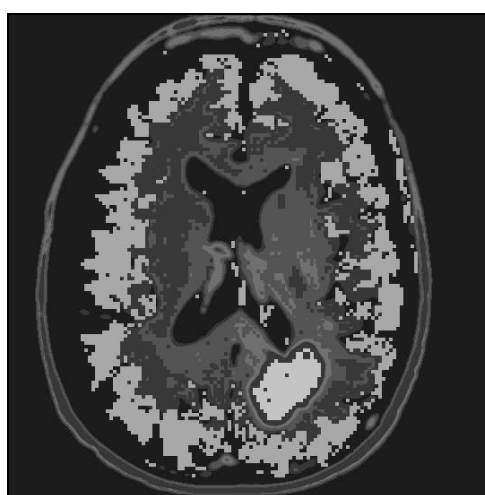
(c) detecção de regiões de fronteira



(d) três classes identificadas

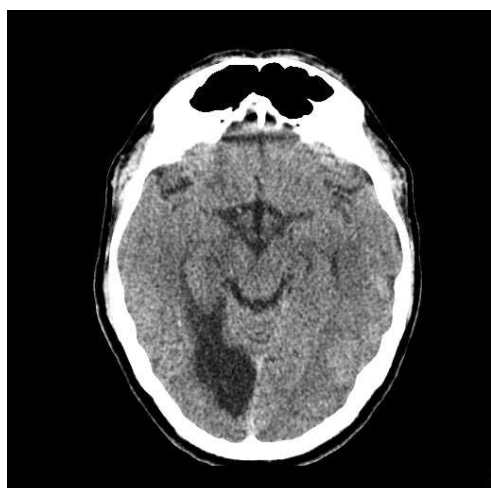


(e) imagem segmentada com três classes

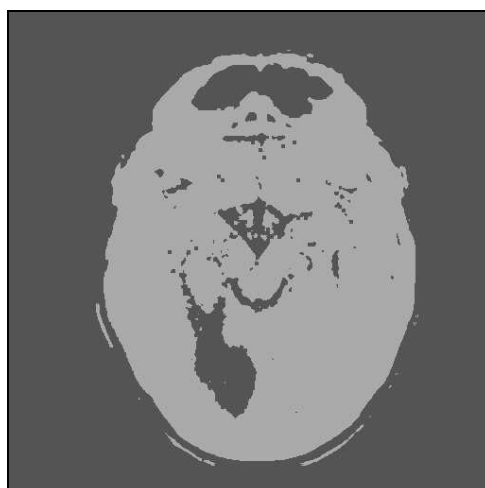


(f) oito classes identificadas

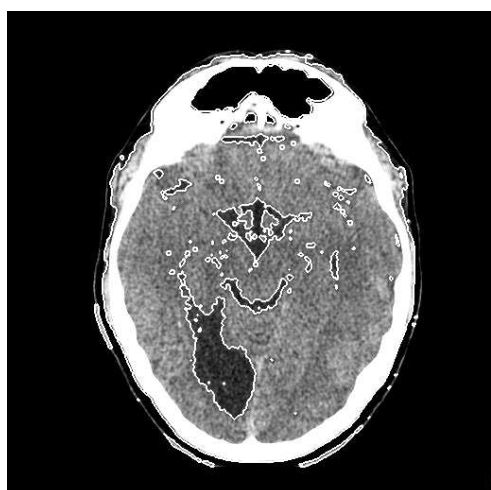
Figura 4.1: Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 540×540 pixels. A área clara na imagem original indica a presença de tumor.



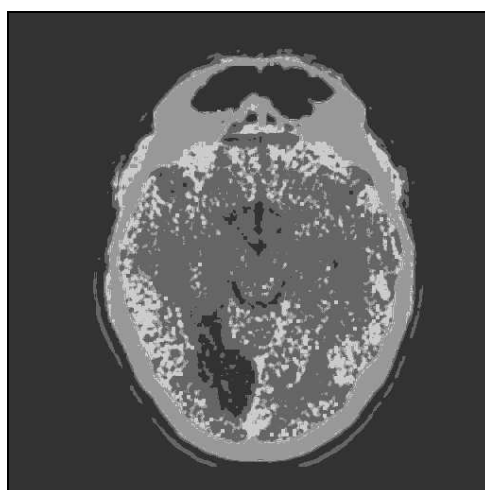
(a) imagem original



(b) duas classes identificadas



(c) imagem segmentada com duas classes

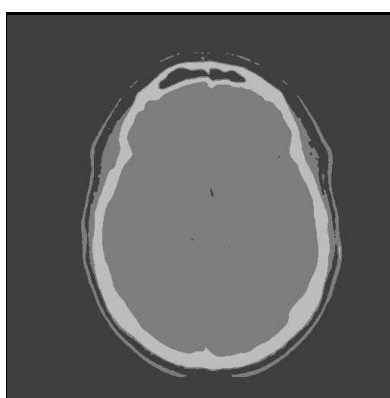


(d) quatro classes identificadas

Figura 4.2: Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 512×512 pixels. A região escura no lado esquerdo do cérebro, indica que houve um acidente vascular cerebral - AVC.



(a) imagem original



(b) três classes identificadas



(c) imagem segmentada com três classes

Figura 4.3: Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 512×512 pixels. A imagem é de um cérebro normal.

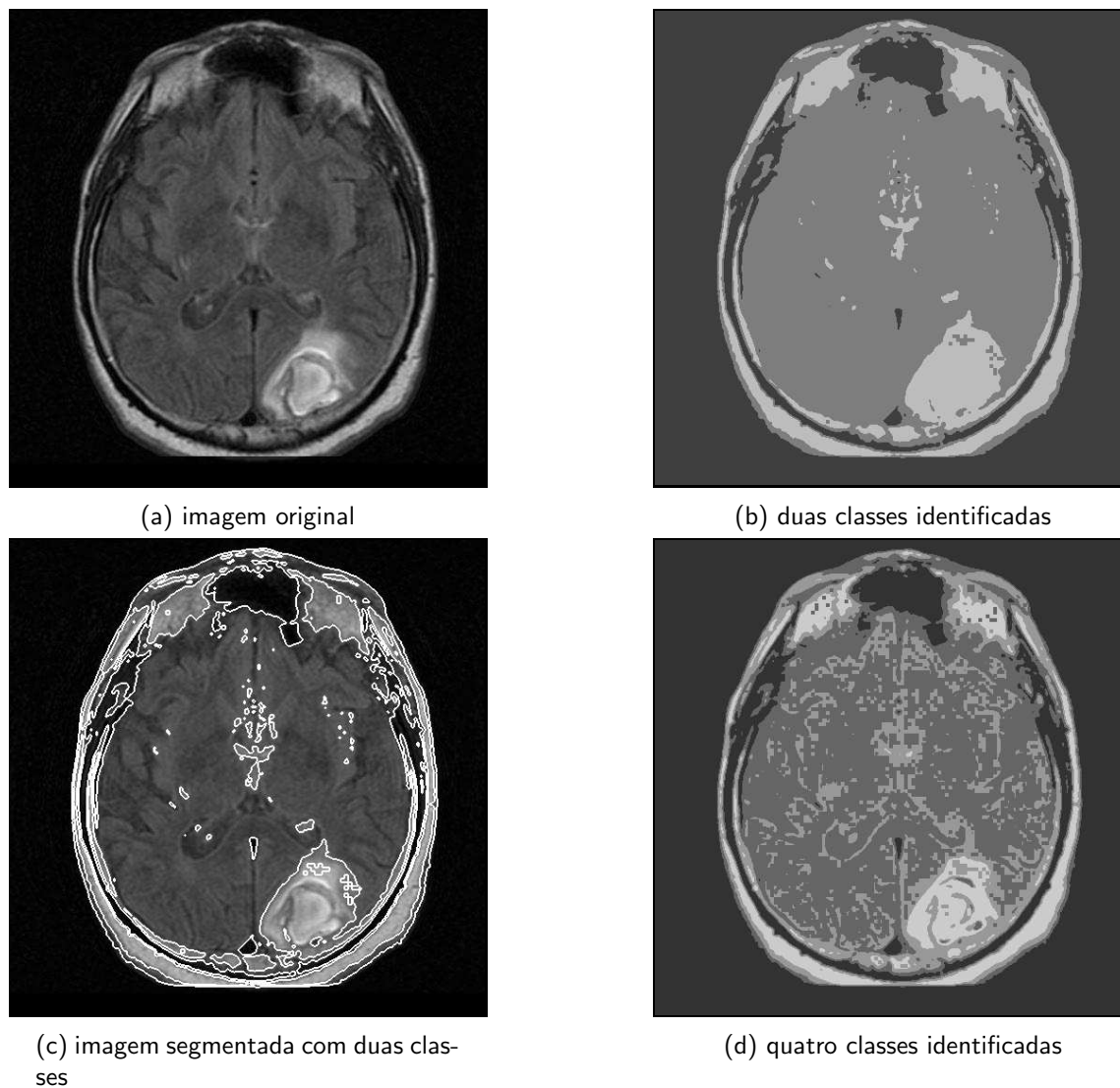


Figura 4.4: Segmentação inicial utilizando transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 512×512 pixels. A região clara no lado direito do cérebro indica a presença de um tumor.

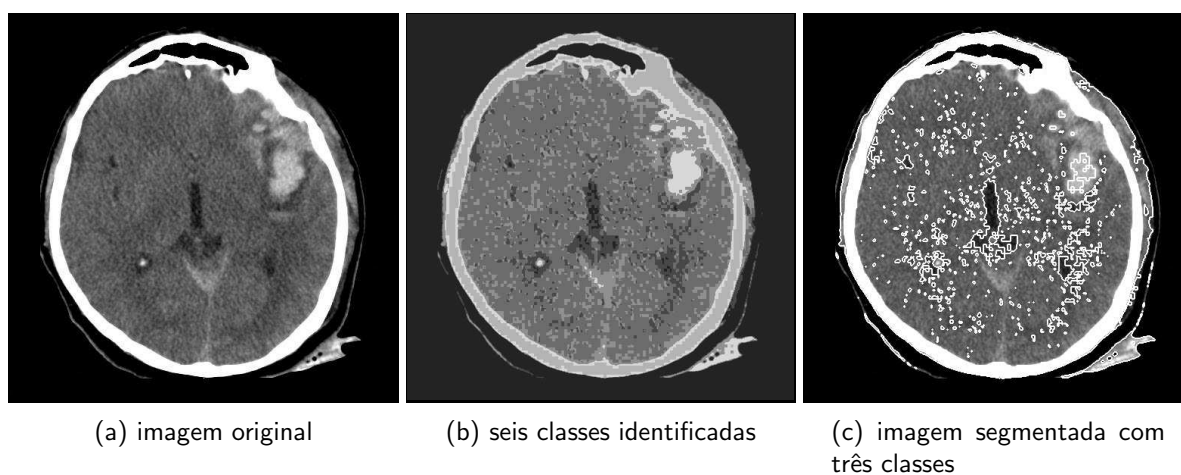


Figura 4.5: Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Daubechies e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 512×512 pixels. No lado direito do cérebro pode-se visualizar uma fratura.

4.2 Aplicação do Método em Imagens de Terreno

As amostras de terrenos escolhidas apresentam detalhes finos e várias reentrâncias, tornando complexo o processo de segmentação. As imagens utilizadas foram obtidas do site *Earth from Space* e são cortesia do laboratório de análise de imagens *Johnson Space Center* da *Agência Espacial Americana (NASA)*.

As figuras 4.6 a 4.10 mostram os resultados obtidos com a aplicação do método de segmentação. No caso da figura 4.6, são apresentadas as imagens resultantes da segmentação inicial e final. Esta última, realizada apenas sobre os blocos localizados em regiões de fronteira, requerem baixo custo adicional já que esses blocos representam uma pequena porção da imagem, conforme pode ser observado pela tabela 4.3. A tabela apresenta também os tempos de execução requeridos para a segmentação inicial e final de cada imagem.

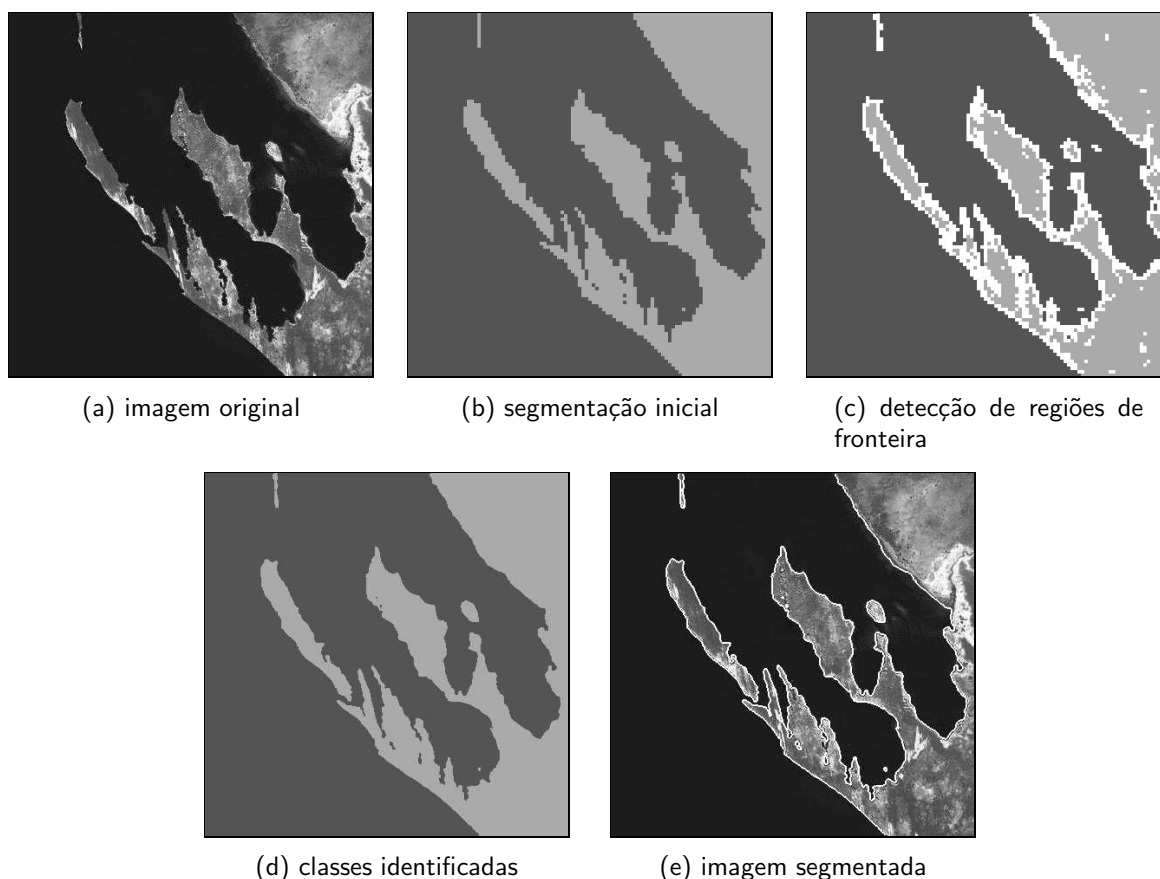


Figura 4.6: Imagem de *Shark Bay, Oeste da Austrália*. Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Haar. Imagem composta de 420×420 pixels.

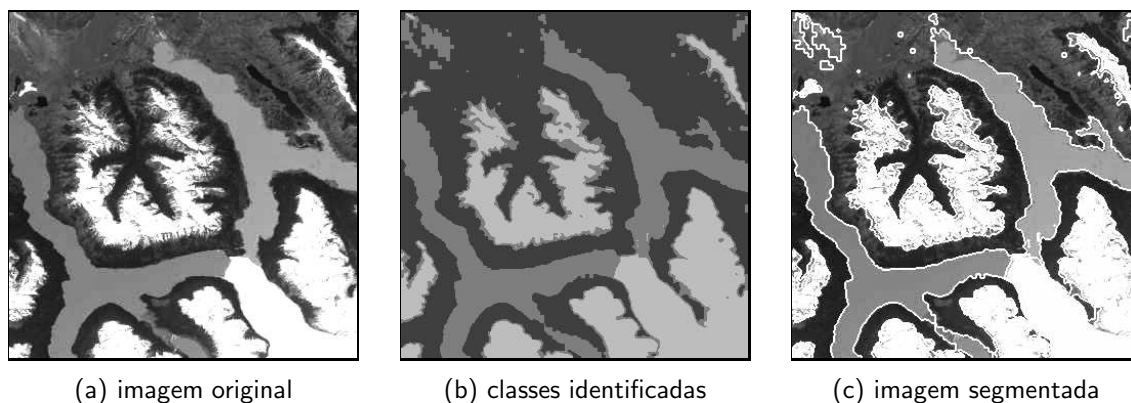


Figura 4.7: Imagem de *Moreno Glacier, Argentina*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 340×340 pixels.



Figura 4.8: Imagem de *Baía Chesapeake, MA, Anápolis, USA*. Segmentação inicial e final utilizando a transformada wavelet de Daubechies. Imagem composta de 320×320 pixels.

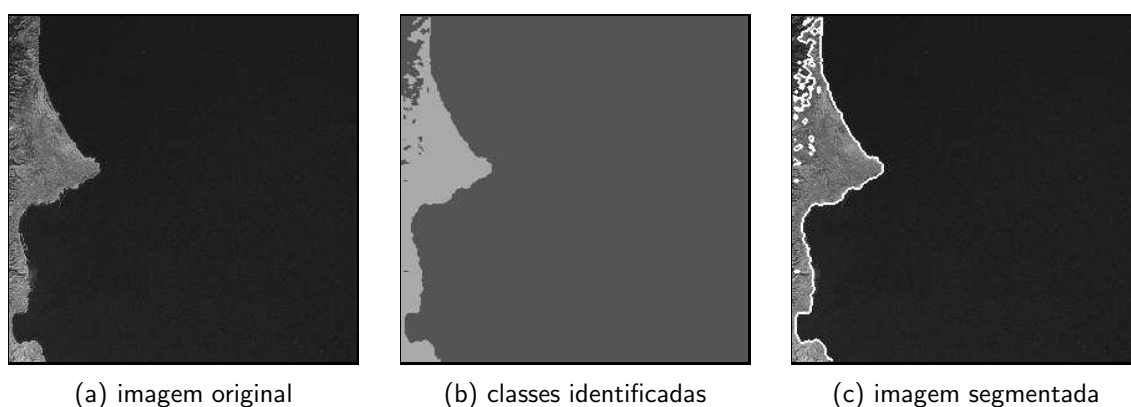


Figura 4.9: Imagem de *Beirute Líbano*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Haar e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 280×280 pixels.

4.3 Comparação entre as Abordagens e Análise dos Resultados

Para uma análise comparativa, as figuras 4.11 e 4.13 mostram as classes identificadas para todas as combinações mostradas na tabela 4.1. As diferenças entre as abordagens de



Figura 4.10: *Costa Krytar, Aden, Yemen*. Segmentação inicial utilizando a transformada wavelet de Daubechies e segmentação final utilizando espectro de potência de Fourier. Imagem composta de 200×200 pixels.

Imagens	Pixels Segmentados na Etapa Final (%)	Tempo de CPU (s)	
		1ª Etapa	2ª Etapa
Figura 4.6	10.60	0.03	0.04
Figura 4.7	29.34	0.02	0.14
Figura 4.8	37.11	0.02	0.12
Figura 4.9	11.98	0.01	0.40
Figura 4.10	05.37	0.01	0.12

Tabela 4.3: Resultados obtidos com a metodologia para imagens de terreno.

segmentação são mínimas e se apresentam nas regiões de fronteiras entre classes e reentrâncias, como pode ser visto nas figuras 4.12 e 4.14. Pode-se notar que em todas as abordagens as classes foram identificadas de forma precisa.

O refinamento ponto-a-ponto, consiste em comparar os parâmetros de uma classe já identificada na segmentação inicial, com os parâmetros obtidos para um dado pixel que se localiza em uma região de fronteira entre classes distintas. Para que essa comparação seja possível é necessário que exista uma relação entre os parâmetros estimados na segmentação inicial e final.

Quando uma abordagem híbrida é utilizada esta comparação não é possível, assim a segmentação final envolve estimar novamente parâmetros para as classes já identificadas e segmentadas na etapa inicial. Por isso, abordagens simples como Haar-Haar ou Daubechies-Daubechies possuem um custo computacional menor, pois não exigem o recálculo dos parâmetros na segmentação final.

A tabela 4.4 mostra os tempos de execução para a segmentação inicial e final da ima-

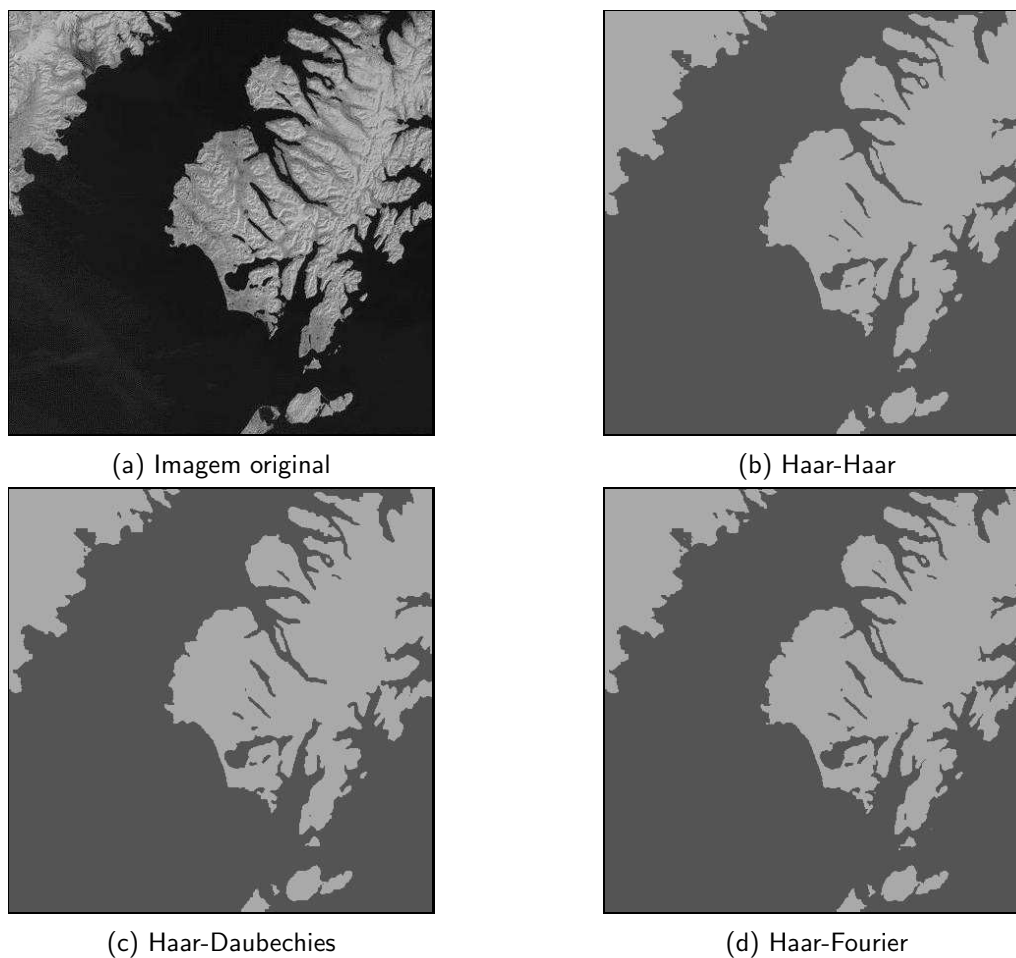


Figura 4.11: Segmentação inicial utilizando a transformada de Haar e as demais abordagens como segmentação final. Imagem composta de 432×432 pixels.

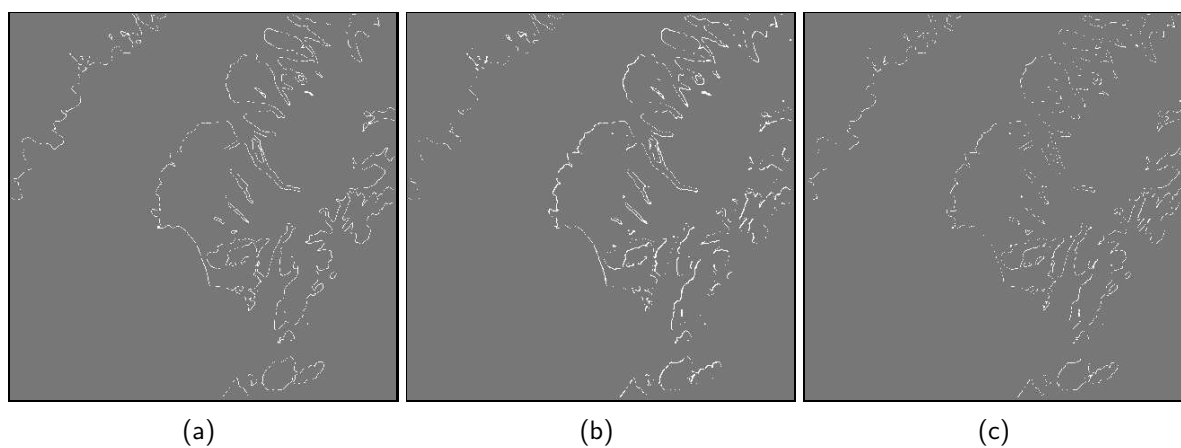


Figura 4.12: Os pixels em branco marcam as diferenças entre as abordagens utilizadas na figura 4.11. (a) diferenças entre a transformada de Haar e Daubechies na segmentação final; (b) diferenças entre a transformada de Haar e o espectro de potência de Fourier; (c) diferenças entre a transformada de Daubechies e do espectro de potência de Fourier para a segmentação final.

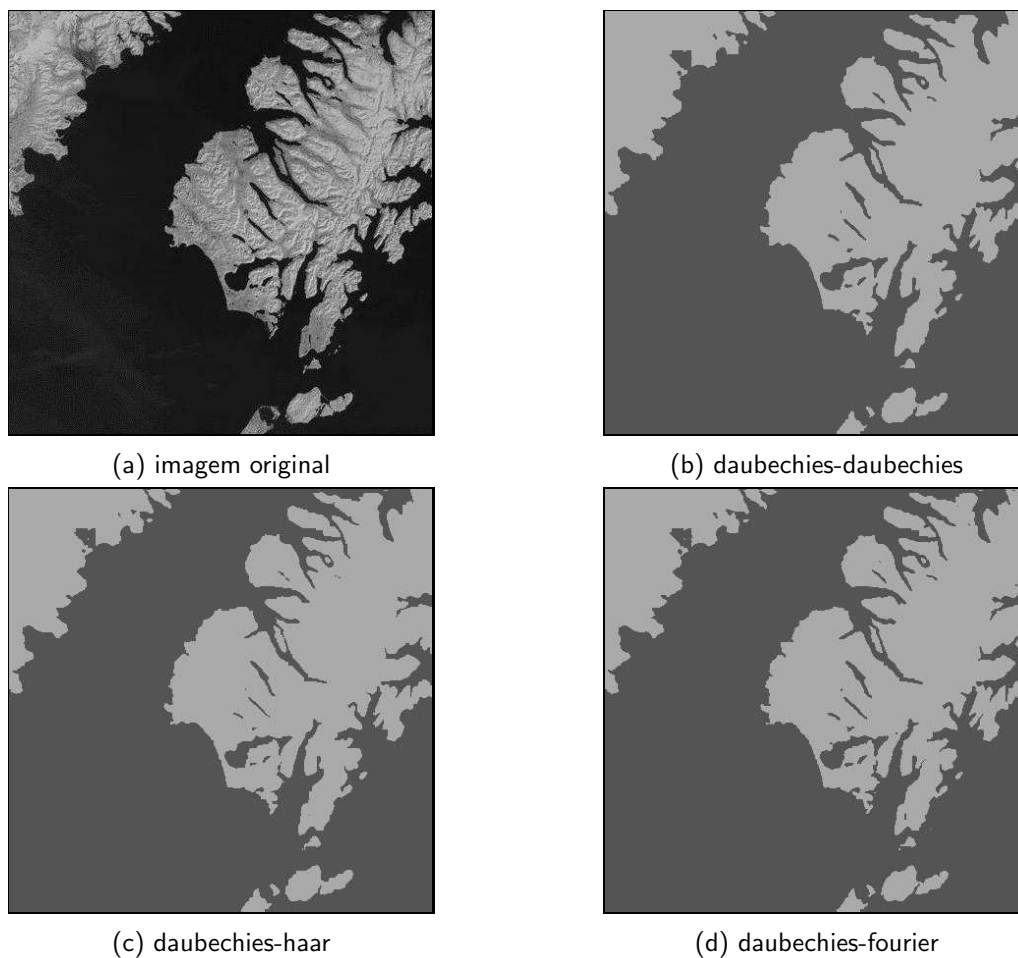


Figura 4.13: Segmentação inicial utilizando a transformada de Daubechies e as demais abordagens como segmentação final. Imagem composta de 432×432 pixels.

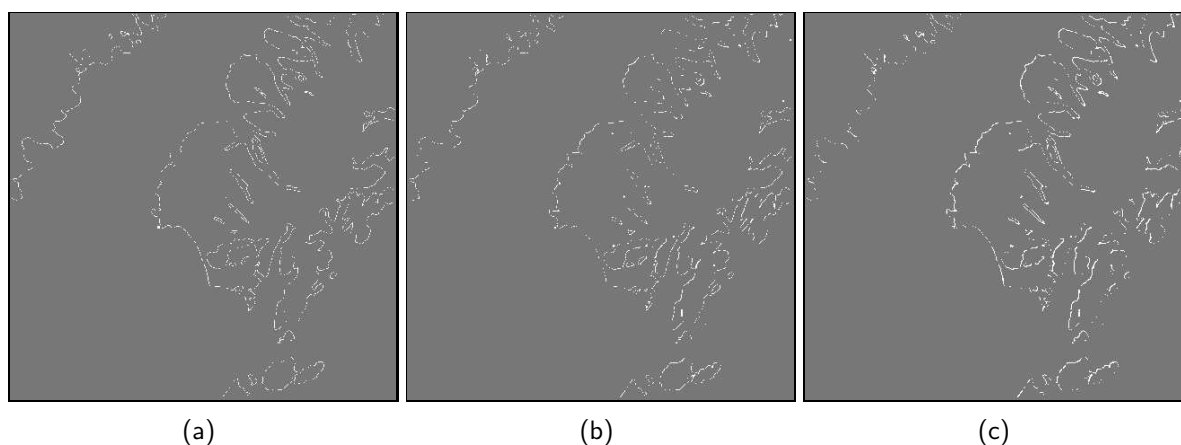


Figura 4.14: Os pixels em branco marcam as diferenças entre as abordagens utilizadas na figura 4.13. (a) diferenças entre a transformada de Daubechies e de Haar para a segmentação final; (b) diferenças entre a transformada de Daubechies e o espectro de potência de Fourier; (c) diferenças entre a transformada de Haar e do espectro de potência de Fourier para a segmentação final.

gem 4.11 ou 4.13(a), utilizando as abordagens listadas na tabela 4.1. Para que a comparação fosse justa, a mesma percentagem de pixels foi segmentada por todos os métodos na segmentação inicial e final (não foi utilizada a transformada rápida de Fourier).

Imagens	Pixels Segmentados na Etapa Final (%)	Tempo de CPU (s)	
		1 ^a Etapa	2 ^a Etapa
Figura 4.11 letra (b)	17.50	0.03	0.09
Figura 4.11 letra (c)	17.50	0.03	0.14
Figura 4.11 letra (d)	17.50	0.03	1.04
Figura 4.13 letra (b)	17.50	0.04	0.11
Figura 4.13 letra (c)	17.50	0.03	0.11
Figura 4.13 letra (d)	17.50	0.03	1.04

Tabela 4.4: Tempos de execução para a segmentação inicial e final da imagem 4.11 ou 4.13(a), por meio das abordagens listadas na tabela 4.1.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou as transformadas wavelets e de Fourier, enfatizando suas aplicações na área de processamento de imagens digitais, em especial para a segmentação de imagens.

Um método de segmentação de imagens baseado em transformadas (wavelets e Fourier) foi proposto e implementado, permitindo o particionamento das imagens em regiões homogêneas. Os resultados obtidos demonstram que o método é eficiente para caracterizar as classes distintas presentes nas imagens.

Como trabalhos futuros, pretende-se estender o método para imagens coloridas e realizar decomposições *wavelets* com níveis adicionais para permitir melhor extração de características.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ACHARYYA, M., DE, R. K. E KUNDU, M. K. Segmentation of Remotely Sensed Images Using Wavelet Features and Their Evaluation in Soft Computing Framework. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 41, 12 (Dezembro 2003), 2900–2905.
- [2] AUJOL, J.-F., AUBERT, G. E BLANC-FERAUD, L. Wavelet-based Level Set Evolution for Classification of Textured Images. *IEEE Transactions on Image Processing* 12, 12 (Dezembro 2003), 1634–1641.
- [3] BURRUS, C. S., GOPINATH, R. A. E GUO, H. *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*. Prentice Hall, New Jersey, NJ, Estados Unidos, 1998.
- [4] CASTAÑON, C. A. B. Recuperação de imagens por conteúdo através de análise multiresolução por wavelets. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Paulo, SP, 2003.
- [5] CHARALAMPIDIS, D. E KASPARIS, T. Wavelet-based Rotational Invariant Roughness Features for Texture Classification and Segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing* 11, 8 (Agosto 2002), 825–837.
- [6] DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Reg. Conf. Series in Applied Math. SIAM, 1992.
- [7] DE LIMA, P. C. Wavelets em Processamento de Imagens, Agosto 2002. www.npdi.dcc.ufmg.br/workshop/wti2002/pdf/cupertino.pdf.
- [8] DE WOUWER, G. V., SCHEUNDERS, P. E D. VAN DYCK, D. Statistical Texture Characterization from Discrete Wavelet Representations. *IEEE Transactions on Image Processing* 8, 4 (Abril 1999), 592–598.
- [9] DEVORE, R., JAWERTH, B. E LUCIER, B. Image Compression Through Wavelet Transform Coding. *IEEE Trans. on Information Theory* 2 (1992), 719–746.

- [10] DONOHO, D. L. E JOHNSTONE, I. M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *Journal of the American Statistical Association* 90, 432 (1995), 1200–1224.
- [11] DONOHO, D. L. E JOHNSTONE, I. M. Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage. *Annals of Statistics* 26, 3 (1998), 879–921.
- [12] DONOHO, D. L., JOHNSTONE, I. M., KERKYACHARIAN, G. E PICARD, D. Wavelet Shrinkage: Asymptopia. *J. R. Statist. Soc. B.* 57, 2 (1995), 301–337.
- [13] FUKUDA, S. E HIROSAWA, H. A Wavelet-based Texture Feature Set Applied to Classification of Multifrequency Polarimetric SAR Images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 37, 5 (Setembro 1999), 2282–2286.
- [14] GOMES, J. E VELHO, L. *From Fourier Analysis to Wavelets*. SIGGRAPH'98 Course Notes, SIGGRAPH-ACM publication, Orlando, FL, Estados Unidos, Julho 1998.
- [15] GONZALEZ, R. C. E WOODS, R. E. *Processamento de Imagens Digitais*. Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2000.
- [16] GRAPS, A. An Introduction to Wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering* 2, 2 (1995), 50–61.
- [17] LIU, Y., WU, S. E ZHOU, X. Texture Segmentation Based on Features in Wavelet Domain for Image Retrieval. In *Visual Communications and Image Processing* (2003), pp. 2026–2034.
- [18] MALLAT, S. Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 37, 12 (Dezembro 1989), 2091–2110.
- [19] MALLAT, S. G. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11, 7 (Julho 1989), 674–693.
- [20] MATHWORKS. Wavelets Toolbox for MATLAB. www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet/.

- [21] MEYER, Y. *Wavelets: Algorithms and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, EUA, 1993.
- [22] MINETTO, R., DA SILVA, R. D., SCHWARTZ, W. E PEDRINI, H. Segmentação de Imagens Utilizando Abordagem Espectral por Transformadas Wavelet e de Fourier. *IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas* (Maio 2005), 1–6.
- [23] MORETTIN, P. A. *Ondas e Ondaletas - Da análise de Fourier à Análise de Ondaletas*. Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.
- [24] NADLER, M. E SMITH, E. P. *Pattern Recognition Engineering*. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, Estados Unidos, 1993.
- [25] PALM, C. Color Texture Classification by Integrative Co-occurrence Matrices. *Pattern Recognition* 37, 5 (Maio 2004), 965–976.
- [26] PAPOULIS, A. *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill Electronic Science Series. McGraw-Hill, 1962.
- [27] PENG, L., ZHAO, Z. M. E MA, J. L. Texture Image Segmentation Based on Wavelet-domain Hidden Markov Models. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium* (Setembro 2004), vol. 6, pp. 3829–3832.
- [28] RANDEN, T. E HUSOY, J. H. Filtering for Texture Classification: A Comparative Study. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 21, 4 (Abril 1999), 291–310.
- [29] SCHWARTZ, W. R. Segmentação de Imagens Baseada em Dependência Espacial Utilizando Campo Aleatório de Markov Associado com Características de Texturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2005.
- [30] SMITH, J. R. E CHANG, S.-F. Quad-tree Segmentation for Texture-based Image Query. In *Proceedings of the second ACM international conference on Multimedia* (New York, NY, Estados Unidos, 1994), ACM Press, pp. 279–286.

- [31] STOLLNITZ, E. J., DEROSE, T. D. E SALESIN, D. H. *Wavelets for Computer Graphics - Theory and Applications*. Morgan Kauffmann Publishers, Inc, San Francisco, CA, Estados Unidos, 1996.
- [32] TUCERYAN, M. E JAIN, A. K. Texture analysis. In *The Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision*, C. H. Chen, L. F. Pau, and P. Wang, Eds. World Scientific Publishing Co., Agosto 1998, pp. 207–248.
- [33] VALENS, C. A Really Friendly Guide to Wavelets. perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html.

APÊNDICE A

TRANSFORMADA DE FOURIER

A.1 Relação entre os Coeficientes das Séries Reais e Complexas de Fourier

Teorema: Seja f uma função 2π periódica, a_n e b_n os coeficientes reais de Fourier, c_n os coeficientes complexos de Fourier. Assim, as três relações que fazem a conexão entre esses coeficientes são

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (\text{A.1})$$

Demonstração: Seja a série real de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (\text{A.2})$$

onde a_0, a_n e $b_n \in \mathbb{R}$. Para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ tem-se a relação de *Euler*

$$e^z = \cos(z) + i \sin(z) \quad (\text{A.3})$$

em particular, tem-se que

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx) \quad (\text{A.4})$$

isolando $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$, obtém-se

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \quad (\text{A.5})$$

substituindo as duas últimas expressões na série de Fourier com coeficientes reais tem-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] \quad (\text{A.6})$$

reescrevendo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \quad (\text{A.7})$$

para $n \geq 1$, tem-se a relação

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (\text{A.8})$$

então tem-se a série

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \quad (\text{A.9})$$

isto é

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx} + c_0 e^{i0x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{A.10})$$

como $e^0 = 1$, tem-se

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B

TRANSFORMADA WAVELET DE HAAR

B.1 Soma Máxima nas Sub-Bandas LH, HL e HH

Como foi descrito na secção 3.1, sobre segmentação inicial, o coeficiente de heterogeneidade possuirá um valor considerável, quando o bloco ao qual pertencer estiver situado sobre uma região de fronteira entre texturas. Este coeficiente, dado na equação 3.2, consiste na soma de todos os pixels que pertencem às sub-bandas de detalhe, LH, HL e HH. Como esta soma pode tomar valores bem variados, dependendo de onde o bloco está situado na imagem, é necessário realizar uma normalização, que é dado pelo valor nrl na equação 3.2.

Para realizar a normalização é necessário determinar nrl , isto é, determinar o valor da maior soma que pode ocorrer nas sub-bandas de detalhe. A seguir, será calculado um limite teórico para o valor nrl para a transformada de Haar. Para isto, serão utilizados blocos de 4×4 pixels, tamanho este que foi usado em todas as imagens utilizadas nos experimentos.

A figura B.1 resume a transformação wavelet de um nível em um bloco de 4×4 pixels. Na figura (a) tem-se pixels de uma imagem de entrada, onde será realizada a transformação wavelet de um nível gerando quatro sub-bandas, figura (b), onde LL é a sub-banda que representa o bloco com uma menor resolução, e LH, HL e HH são sub-bandas de detalhe.



Figura B.1: Transformação wavelet de um nível em um bloco de 4×4 pixels.

Com o objetivo de encontrar a maior soma nas sub-bandas de detalhe, são realizadas as decomposições na horizontal e na vertical, tal como é realizado para obter a transformada

de Haar para um certo bloco de uma imagem, permitindo a determinação de padrões nos coeficientes de detalhe que permitam calcular nrl .

Suponha que os literais da matriz mostrada na equação B.1 sejam os pixels de um dado bloco de uma imagem.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Através da aplicação da transformada na direção horizontal, têm-se a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{c+b}{\sqrt{2}} & \frac{a-b}{\sqrt{2}} & \frac{c-d}{\sqrt{2}} \\ \frac{e+f}{\sqrt{2}} & \frac{g+h}{\sqrt{2}} & \frac{e-f}{\sqrt{2}} & \frac{g-h}{\sqrt{2}} \\ \frac{i+j}{\sqrt{2}} & \frac{k+l}{\sqrt{2}} & \frac{i-j}{\sqrt{2}} & \frac{k-l}{\sqrt{2}} \\ \frac{m+n}{\sqrt{2}} & \frac{o+p}{\sqrt{2}} & \frac{m-n}{\sqrt{2}} & \frac{o-p}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

onde $\sqrt{2}$ é a normalização dos coeficientes da transformada.

A partir da matriz mostrada na equação B.2, a aplicação da transformada na direção vertical produz a matriz B.3

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b+e+f}{2} & \frac{c+d+g+h}{2} & \frac{a-b+e-f}{2} & \frac{c-d+g-h}{2} \\ \frac{i+j+m+n}{2} & \frac{k+l+o+p}{2} & \frac{i-j+m-n}{2} & \frac{k-l+o-p}{2} \\ \frac{a+b-e-f}{2} & \frac{c+d-g-h}{2} & \frac{a-b-e+f}{2} & \frac{c-d-g+h}{2} \\ \frac{i+j-m-n}{2} & \frac{k+l-o-p}{2} & \frac{i-j-m+n}{2} & \frac{k-l-o+p}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Devido à forma como as subtrações são realizadas na transformada de Haar, pode-se ter coeficientes de detalhes negativos e positivos. Deste modo, deve-se tomar o módulo destes detalhes, pois para determinar nrl é necessário incorporar as flutuações locais nos valores dos detalhes, não importando se estes são positivos ou negativos.

Coefficientes de diferentes sub-bandas de detalhe são agrupados em uma mesma equação,

devido ao fato de um mesmo pixel aparecer nas três sub-bandas de detalhes. Assim, o objetivo é maximizar todos os coeficientes de detalhe no qual este pixel participa e não apenas um coeficiente.

Assim, da matriz mostrada em B.3, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{|a-b+e-f|}{2} + \frac{|a-b-e+f|}{2} + \frac{|a+b-e-f|}{2} \\ \frac{|c-d+g-h|}{2} + \frac{|c-d-g+h|}{2} + \frac{|c+d-g-h|}{2} \\ \frac{|k-l+o-p|}{2} + \frac{|k-l-o+p|}{2} + \frac{|k+l-o-p|}{2} \\ \frac{|i-j+m-n|}{2} + \frac{|i-j-m+n|}{2} + \frac{|i+j-m-n|}{2} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Determinadas as equações, surge a questão, dos valores que os pixels devem assumir para que nrl (soma de todas as equações do sistema mostrada em B.4) seja máximo.

As quatro equações do sistema possuem os mesmos sinais, mudando somente os pixels envolvidos. Dessa forma, se forem encontrados os valores dos pixels na primeira equação que tornam seu valor máximo, os valores ideais para os pixels das demais equações serão obtidos.

Por exemplo, seja a primeira equação do sistema

$$\frac{|a-b+e-f|}{2} + \frac{|a-b-e+f|}{2} + \frac{|a+b-e-f|}{2} \quad (\text{B.5})$$

sabendo-se que a, b, e e $f \geq 0$, pois pixels em uma imagem são sempre positivos, e que a, b, e e $f \leq L_{\text{máx}}$, sendo $L_{\text{máx}}$ o maior valor que um pixel pode assumir na imagem, por exemplo, o maior tom de cinza.

Supondo que o pixel a seja igual a $L_{\text{máx}}$ na equação B.5 e que os demais pixels sejam nulos. Assim tem-se que a soma é igual a três vezes $L_{\text{máx}}$ dividido por dois.

Agora seja o pixel a igual a $L_{\text{máx}}$, e que os demais pixels tomem valores diferentes de zero. Esta soma será sempre menor que três vezes $L_{\text{máx}}$ dividido por dois, pois em todas as equações há o valor b positivo e dois negativos, o valor e positivo e dois negativos e o valor f positivo e dois negativos. Assim, ao mesmo tempo que o valor do pixel é acrescentado, o dobro deste é retirado. Desse modo, tem-se que nrl será máximo quando um pixel no bloco

for máximo e os demais que se relacionam com ele através da decomposição forem nulos.

Finalmente, deduz-se que

$$nrl = \frac{\text{número de equações no sistema} * 3 * L_{\text{máx}}}{2} \quad (\text{B.6})$$

Como para um bloco de 4×4 pixels há quatro equações no sistema, então

$$nrl = 6 * L_{\text{máx}} \quad (\text{B.7})$$

Assim é possível realizar a normalização dos coeficientes de heterogeneidade. Este valor de normalização pode ser usado para qualquer tamanho de bloco, apenas observando o fato de que, quando se aumenta as dimensões do bloco, o número de equações no sistema aumenta.