

Transformadas Wavelets: Teoria e Aplicações em Análise de Imagens Digitais

Ricardo Dutra da Silva
Rodrigo Minetto
Orientador: Hélio Pedrini

Departamento de Informática - UFPR

`ricardo@pet.inf.ufpr.br`
`rodrigo@pet.inf.ufpr.br`



Apresentação

1. Introdução
2. Trabalhos relacionados
3. Metodologia desenvolvida
4. Resultados experimentais
5. Conclusões e trabalhos futuros

Introdução

- Este trabalho aborda a teoria e aplicações das transformadas wavelets e de Fourier na análise de imagens digitais, dando especial atenção às wavelets, uma abordagem para decomposição hierárquica de funções.
- Transformadas modificam a representação de dados de maneira que estes possam ser mais facilmente analisados.
- Wavelets são utilizadas em áreas como mecânica de fluidos, computação numérica, análise de imagens, processamento de sinais entre outras.
- Serão vistas as aplicações em compressão, remoção de ruído e segmentação de imagens, na área de processamento de imagens.
- Um método de segmentação utilizando características de texturas para descrever as regiões que compõem as imagens será proposto.

Trabalhos Relacionados

Histórico

- Uma das técnicas mais conhecidas para análise de sinais é a transformada de Fourier, baseada nos trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).
- Alfred Haar, em 1909, descreve o primeiro sistema ortonormal de funções.
- A formalização da teoria das transformadas wavelets foi realizada recentemente em trabalhos de Mallat e Daubechies, em 1989.
- Yves Meyer e Stephane Mallat aplicaram wavelets em uma teoria chamada de *multiresolução*. Mallat mostrou que esta pode ser vista como a aplicação de algoritmos de pirâmide.

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier consiste em expressar uma função real como uma soma infinita de senos e cossenos, provendo uma forma de representar no domínio da frequência um sinal inicialmente expresso no domínio do tempo.
- A transformada bidimensional de Fourier, dada na equação 1, apresenta grande concentração de energia no centro do plano de frequências para imagens que possuem componentes de baixa frequência, enquanto que essa energia fica mais espalhada em imagens que apresentam componentes de alta frequência.
- Apresenta uma deficiência por não oferecer informações sobre o sinal no domínio do tempo.

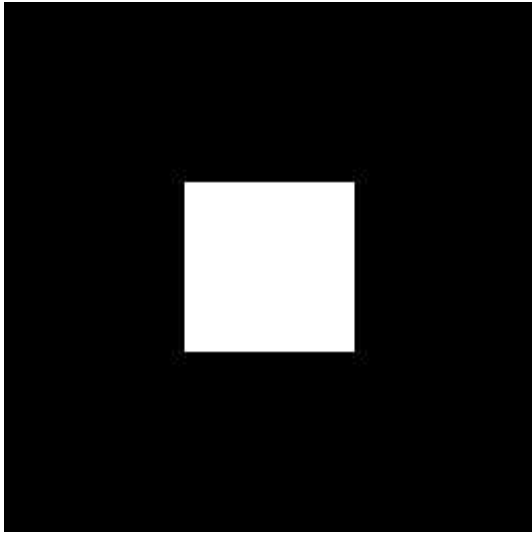
$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(k, l) \exp(-2\pi i(ku + lv)/n) \quad (1)$$

Transformadas Wavelets

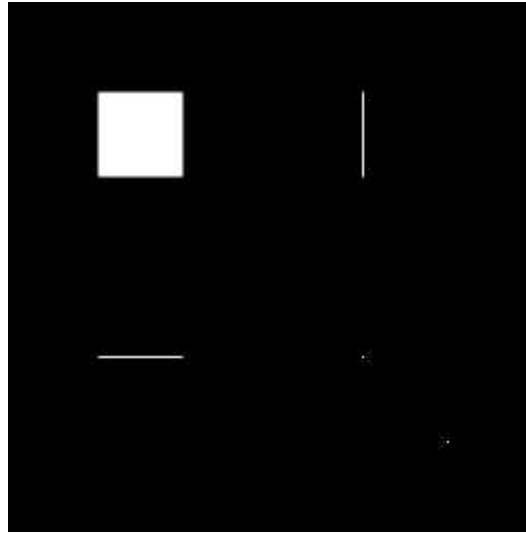
- As transformadas wavelets surgiram como uma abordagem alternativa para o processamento de imagens, cobrindo a deficiência da transformada de Fourier por permitir que tanto informações sobre a frequência quanto informações sobre o tempo estejam presentes.
- Decompõe um sinal por meio de uma série de funções elementares, criadas a partir de escalas e translações de uma função base, chamada *wavelet mãe* (equação 2).

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (2)$$

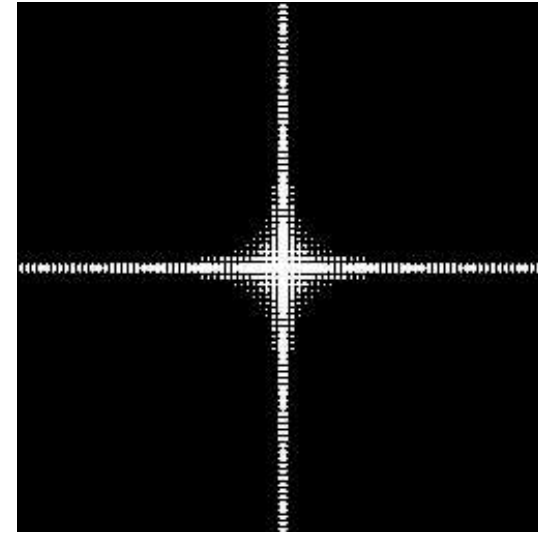
Diferenças entre as transformadas



(a) Imagem de Entrada



(b) Decomposição Wavelet



(c) Espectro de Fourier

Transformadas Wavelets

- A soma sobre todo o tempo de um sinal multiplicado por funções escaladas e transladadas da função ψ define a *transformada wavelet contínua (CWT)*. Esta gera um conjunto de coeficientes c que representam o sinal na base wavelet, como pode ser visto na equação 3.

$$c(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{s,\tau}(t)dt \quad (3)$$

- A inversa é dada por

$$f(t) = \int_s \int_{\tau} c(s, \tau)\psi_{s,\tau}(t)dtds \quad (4)$$

Análise de Multiresolução

- A multiresolução é um conjunto de espaços de aproximação sucessivos V^j , $j \in \mathbb{Z}$, que satisfazem a relação 5.

$$\dots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset L^2 \quad (5)$$

- Tem-se que os espaços são relacionados através de

$$f(t) \in V^j \iff f(2t) \in V^{j+1} \quad (6)$$

- Sendo gerados por translações inteiras de uma única função $f(t)$

$$f(t) \in V^j \iff f(t - k) \in V^j, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

Análise de Multiresolução

- Para um espaço V^j surge a necessidade de definir um conjunto de funções ϕ (equação 8) que forme uma base para a geração deste espaço.

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (8)$$

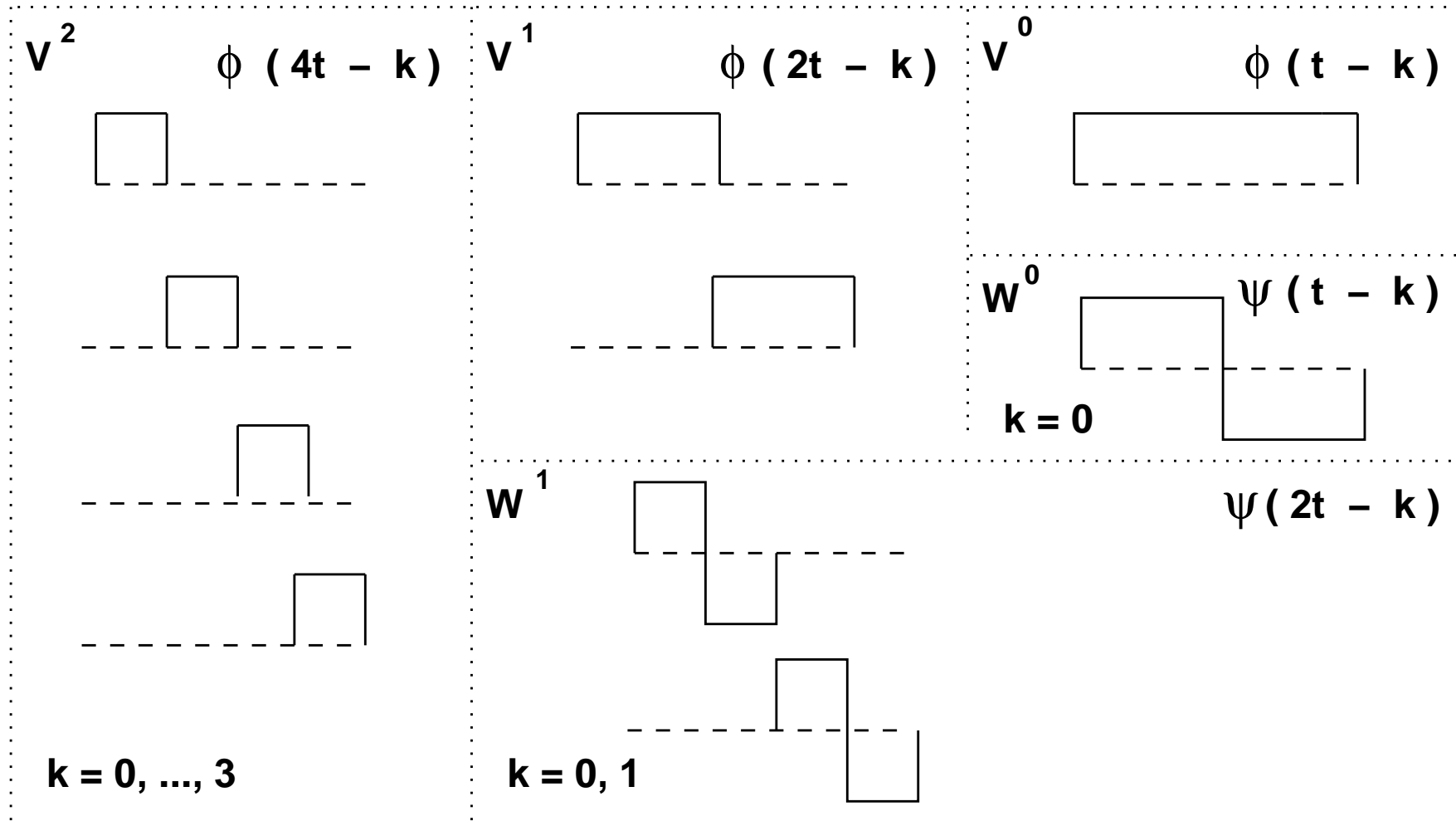
- Um segundo conjunto de funções ψ , dado por 9, estende as diferenças entre os sub-espacos V^j e V^{j+1} . Estas funções formam um sub-espaco W^j ortogonal ao sub-espaco V^j .

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (9)$$

- Juntamente, as funções de escala $\phi(x)$ de V^j e $\psi(x)$ de W^j formam uma base para o espaco V^{j+1} .
- O coeficiente $2^{j/2}$ é utilizado para normalizar as funções.

Análise de Multiresolução

- Funções da transformada de Haar



Transformada de Haar

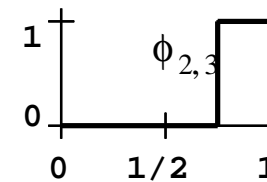
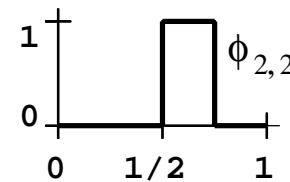
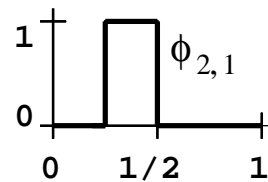
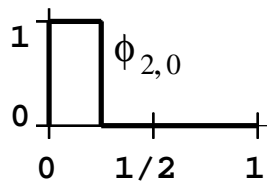
- Função de escala de Haar para V^j

$$\phi_{j,k} = \phi(2^j x - k) \quad k = 0, \dots, 2^j - 1$$

onde

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Base de Haar para V^2



Transformada de Haar

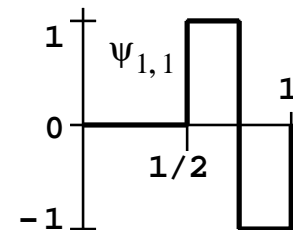
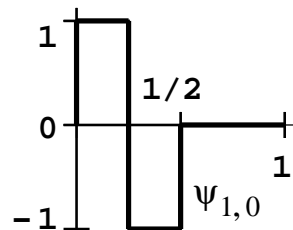
- Função de wavelet Haar para W^j

$$\psi_{j,k} = \psi(2^j x - k) \quad k = 0, \dots, 2^j - 1$$

onde

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Haar wavelet para W^1



Transformadas Bidimensionais

- Em processamento de imagens, as transformadas bidimensionais são aplicadas por um conjunto de *quadrature mirror filters* (QMF), formado por dois filtros l (passa-baixa) e h (passa-alta).
- A aplicação dos (QMF) sobre uma imagem nas direções vertical e horizontal gera um nível de decomposição e produz quatro sub-bandas, LL, LH, HL e HH (figura 1(a)). Este processo pode ser aplicado recursivamente na sub-banda LL, figura 1(b).

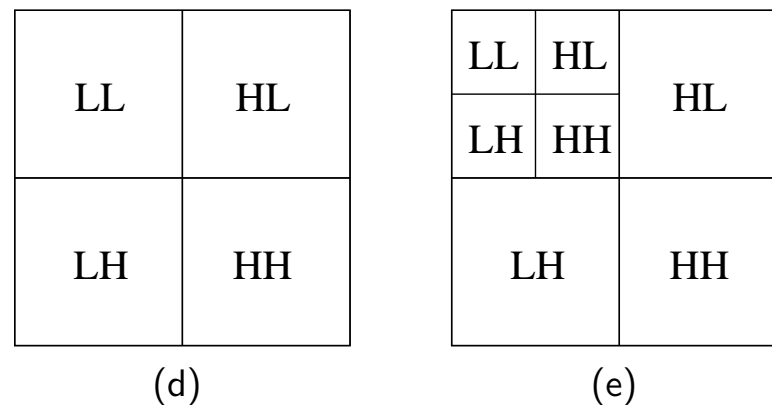


Figura 1

Quadrature Mirror Filters

- Para a construção dos filtros l e h , as funções de escala e wavelets são dadas por

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_k l_k \phi(2x - k) \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2x - k) \quad (10)$$

- Os filtros l e h são relacionados pela equação 11, onde n é o tamanho do filtro.

$$h_k = (-1)^k l_{n-k-1}, \quad k \in 0, 1, \dots, n-1 \quad (11)$$

- Os coeficientes de l_k e h_k são dados por

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(2x - k) dt \quad (12)$$

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(2x - k) dt \quad (13)$$

Wavelets de Daubechies

- Coeficientes da função de escala

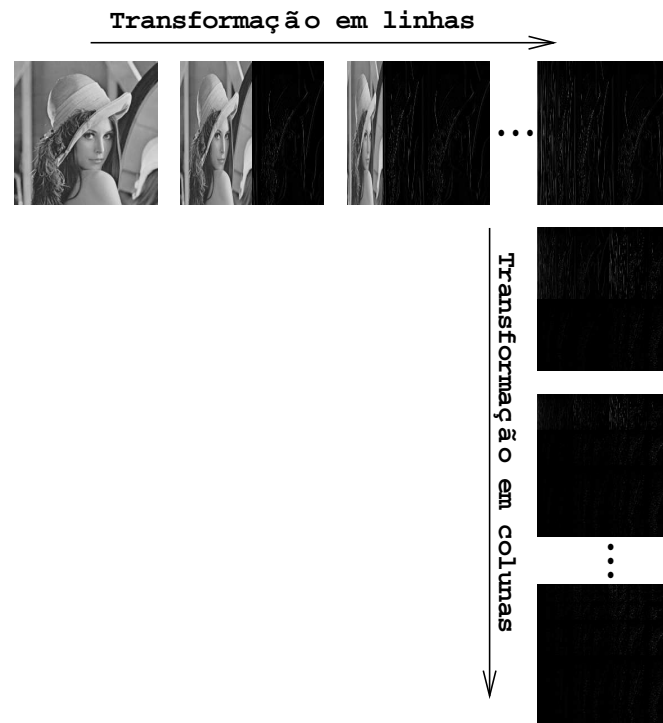
$$l_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad l_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (14)$$

- Coeficientes da função wavelet

$$h_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_1 = -\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad h_3 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (15)$$

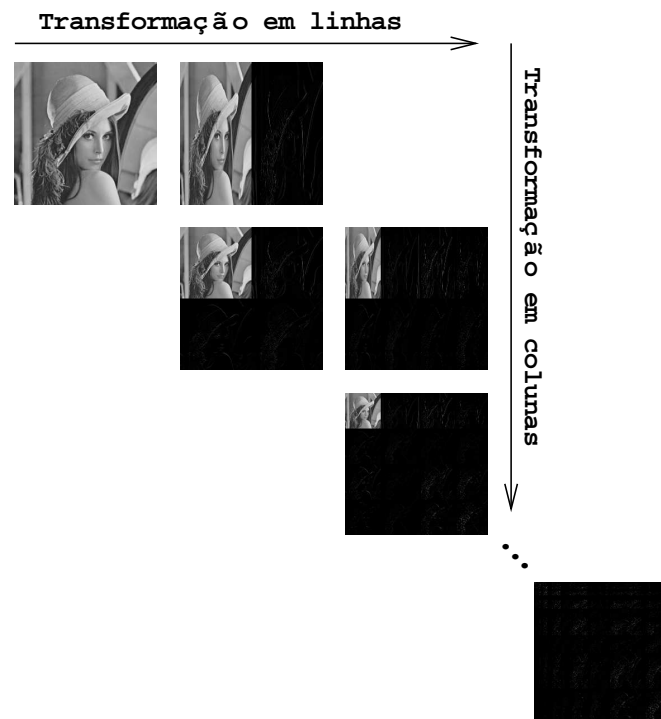
Modos de Aplicação dos QMF

- *Decomposição Padrão*: aplica-se recursivamente a transformada unidimensional para cada linha da imagem até que reste apenas uma coluna com coeficientes de média e o restante com coeficientes de detalhe. O mesmo processo é aplicado para cada coluna. O resultado é um único coeficiente global de média com o restante dos coeficientes sendo de detalhe.



Modos de Aplicação dos QMF

- *Decomposição Não-Padrão*: Aplica-se as operações em linhas e colunas alternadamente até que reste apenas um único coeficiente global de média com o restante dos coeficientes sendo de detalhe.



Aplicabilidade

- Compressão de imagens
- Atenuação de ruído
- Segmentação de imagens

Compressão de Imagens

- A partir de uma imagem expressa como a soma ponderada de funções de base $u_1(x), \dots, u_m(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(x)$$

onde c_1, \dots, c_m representam os coeficientes, procura-se

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{c}_i \hat{u}_i(x)$$

em outra base de funções $\hat{u}_1(x), \dots, \hat{u}_{\hat{m}}(x)$ com coeficientes $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{\hat{m}}$, de forma que o número de coeficientes \hat{m} seja menor que m e que o erro $\|f(x) - \hat{f}(x)\|$ entre as imagens seja aceitável.

Atenuação de Ruído

- A transformada wavelet tem se mostrado uma abordagem poderosa para a remoção e atenuação de ruído, devido a sua propriedade de multiresolução.
- O método consiste em realizar a decomposição wavelet sobre a imagem, gerando, através desta, coeficientes de média e de detalhe. Detalhes pequenos podem ser removidos sem afetar substancialmente a estrutura da imagem. Desta forma, resta apenas os coeficientes que fornecem as informações mais relevantes sobre a imagem.
- O último passo é a aplicação da transformada wavelet inversa para recuperar a imagem, já com o ruído atenuado.

Segmentação de Imagens

- A segmentação de imagens é uma das tarefas mais críticas presentes na análise automática de imagens. Consiste na partição do conjunto de dados de modo a produzir estruturas de mais alto nível.
- Normalmente são utilizadas características das regiões.
- A utilização de informações de textura constitui uma abordagem adequada para representar regiões de uma imagem, encontrando-se entre as características percebidas pelos humanos.

Segmentação de Imagens

- Para descrever regiões texturizadas, utiliza-se métodos de extração de características, os quais visam obter uma representação simplificada, porém significativa para cada região.
- Tais métodos são divididos entre as abordagens espectral, estatística e estrutural.
- Na abordagem espectral são extraídos descritores, a partir da representação obtida após a execução de transformações na imagem de entrada.
- As técnicas de análise de textura utilizadas no trabalho foram a transformada wavelet e o espectro de potência de Fourier.

Abordagem Espectral

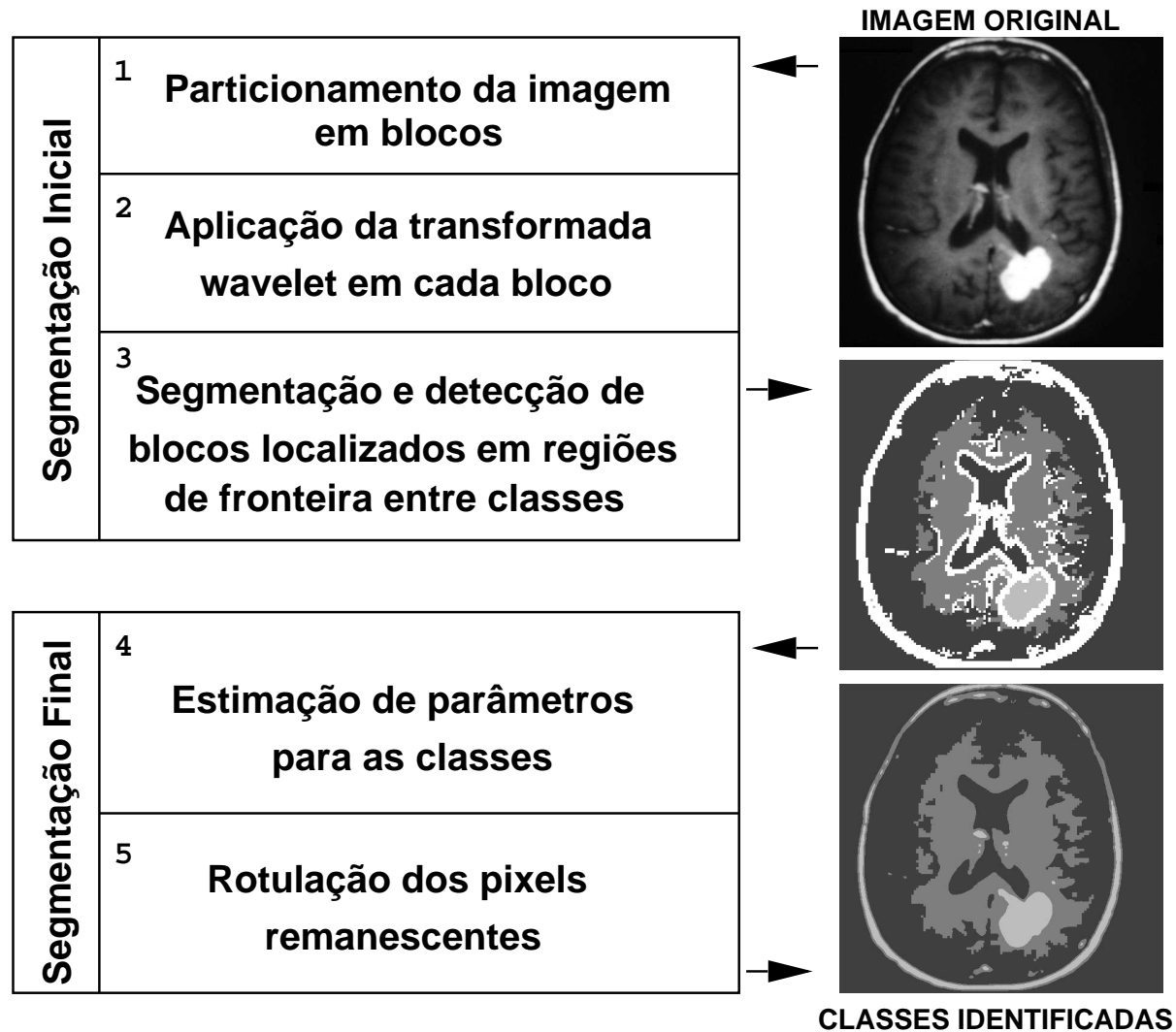
- A transformada wavelet preserva tanto informações espaciais quanto de frequência.
- A decomposição wavelet de um nível gera quatro sub-bandas, LL, HH, LH e HL. A primeira e a segunda denotam respectivamente as baixas e altas frequências; as duas últimas denotam as frequências intermediárias.
- Para cada sub-banda é calculada uma característica que descreve sua energia, dada pela equação 16, onde sb denota uma das bandas LL, LH, HL ou HH, e $a(x, y)$ representa o coeficiente da transformada na coordenada (x, y) , obtido a partir de uma das sub-bandas, as quais são compostas de m coeficientes cada.

$$F_{sb} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum a(x, y)^2} \quad (16)$$

Abordagem Espectral

- O espectro resultante da transformada bidimensional de Fourier, apresenta grande concentração de energia no centro do plano de frequências para imagens que possuem componentes de baixa frequência, enquanto que essa energia fica mais espalhada em imagens que apresentam componentes de alta frequência.
- Texturas ásperas apresentam concentração de energia no centro do plano.
- Texturas finas apresentam a energia do espectro espalhada pelo plano de frequências.

Metodologia Proposta



Segmentação Inicial

- A primeira etapa consiste em dividir a imagem em regiões, aplicar a transformada wavelet e estimar os parâmetros que descrevem cada região.
- Blocos semelhantes são agrupados em classes iguais e atualizam a característica da classe, conforme a equação 17.

$$f_{sb}^j = \frac{1}{t} \sum_{k \in c_j} F_{sb}^k \quad (17)$$

Medida de Heterogeneidade

- Os coeficientes wavelets nas sub-bandas de detalhe (LH, HL e HH) medem as flutuações locais dos valores dos pixels em uma dada escala.
- Coeficientes baixos nestas bandas caracterizam regiões homogêneas. O inverso acontece em regiões de fronteira entre texturas e contornos.
- Blocos localizados em regiões de fronteira entre classes (identificados pela equação 18) são considerados durante a segmentação final.

$$w_i = \frac{\sum_{LH} |a(x, y)| + \sum_{HL} |a(x, y)| + \sum_{HH} |a(x, y)|}{nrl} \quad (18)$$

Medida de Heterogeneidade

- Os blocos em branco serão considerados na segmentação final.

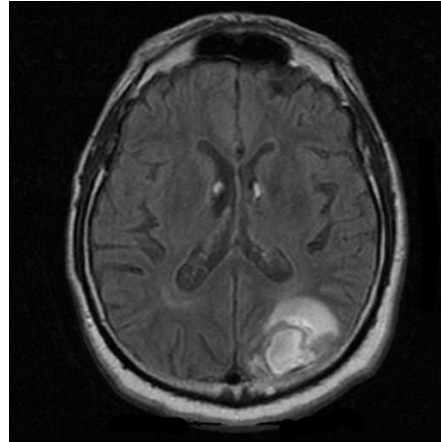
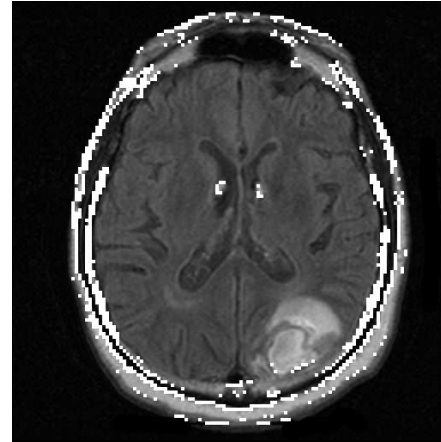
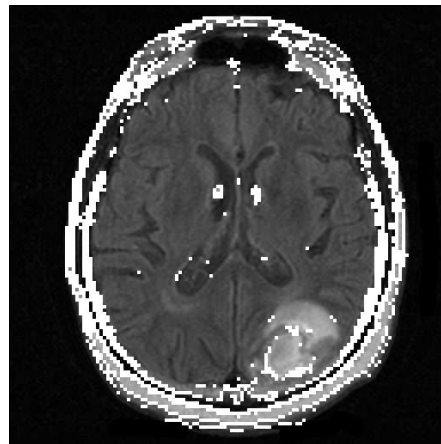


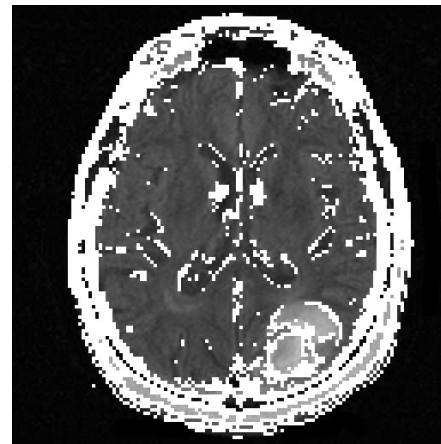
imagem original



5%



10%



20%

Segmentação Final

- É realizado um refinamento ponto-a-ponto utilizando a transformada de Haar, Daubechies ou Fourier.
- A partir de uma das transformadas são extraídos parâmetros que descrevem as classes. Para as transformadas wavelets a característica é calculada pela mesma fórmula usada na segmentação inicial. Para a transformada de Fourier é utilizado o espectro da transformada (equação 19).
- Para cada pixel em blocos marcados como regiões de fronteira entre classes, calcula-se a característica em uma janela centralizada sobre o pixel. Os pixels são atribuídos à classe, cuja distância Euclidiana seja mínima entre os descritores obtidos para a janela e os representantes das classes.

$$S_{pf} = \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1} \text{Re}\{\mathcal{F}(u, v)\}^2 + \text{Co}\{\mathcal{F}(u, v)\}^2 \quad (19)$$

Resultados Obtidos

- O método de segmentação foi aplicado em imagens reais de ressonância magnética e de terrenos.
- As imagens escolhidas apresentam detalhes finos, tornando complexo o processo de segmentação.
- O tamanho do bloco foi selecionado de forma a preservar os detalhes das imagens (4x4 pixels).
- O limiar L foi determinado de acordo com o número de classes desejadas.
- Os experimentos foram executados em um microcomputador AMD ATHLON 2200 XP+ com 256 megabytes de memória RAM.

Resultados Obtidos

- Segmentação inicial e final utilizando a transformada de Haar. O tumor é indicado pela área clara na parte inferior da imagem composta por 540x540 pixels.
-

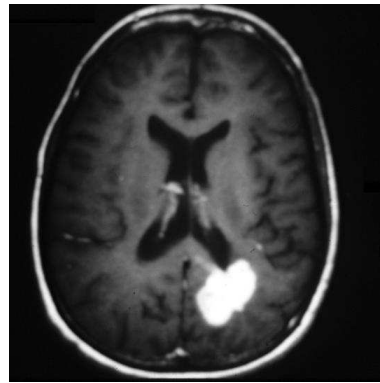
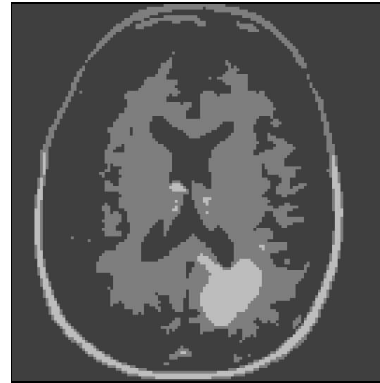
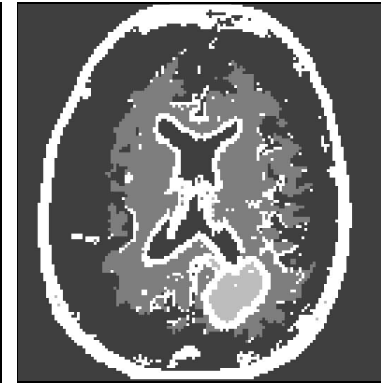


Imagem original



Segmentação inicial



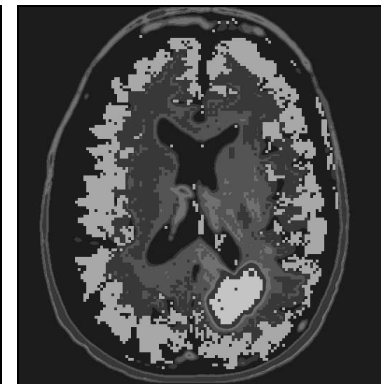
Detecção de regiões de fronteira



Classes identificadas



Imagem segmentada



Oito classes identif.

Resultados Obtidos

- Haar-Haar. O AVC é indicado pela área escura na parte inferior da imagem composta por 512x512 pixels.

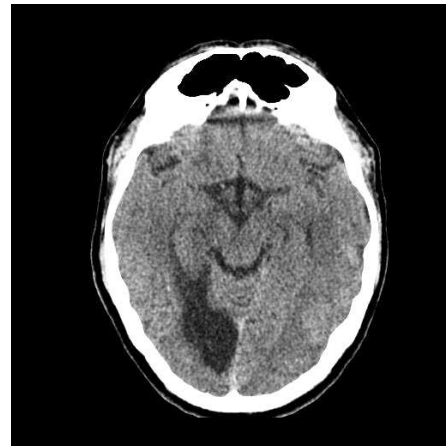
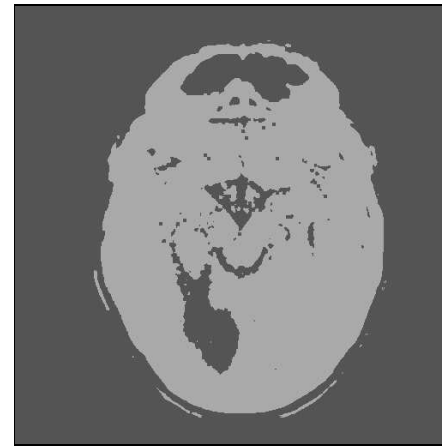


Imagem original



Classes identificadas

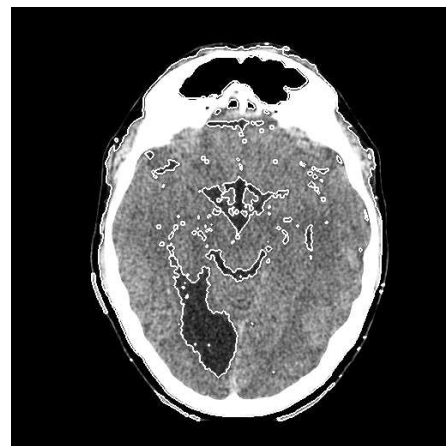
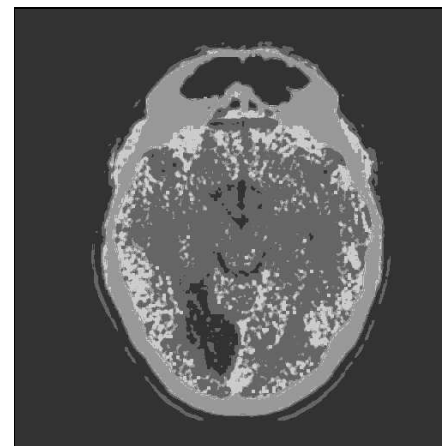


Imagem segmentada



Quatro classes identif.

Resultados Obtidos

- Haar-Daubechies. O tumor é indicado pela área clara na parte inferior da imagem composta por 512x512 pixels.
-

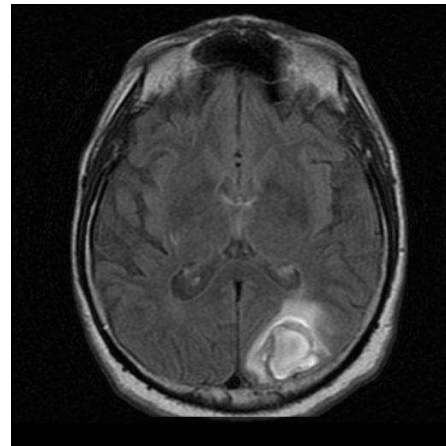
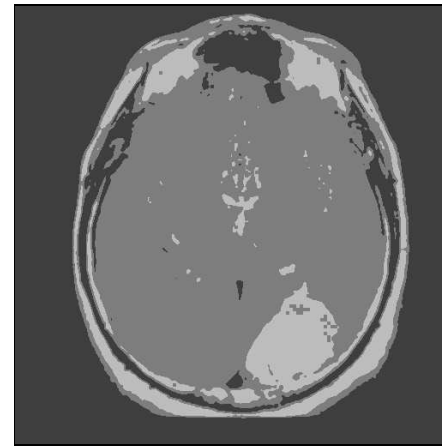


Imagem original



Classes identificadas

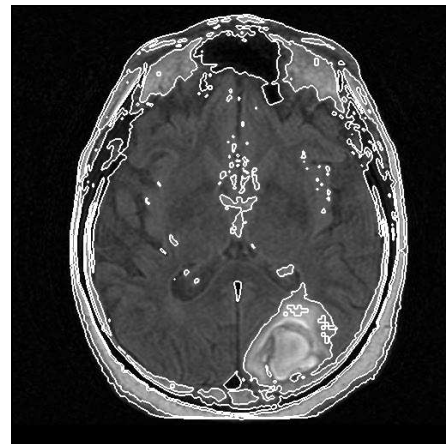
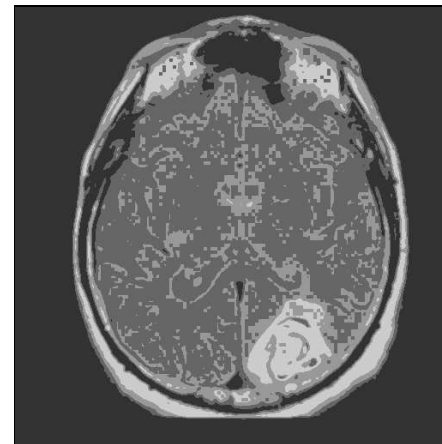


Imagem segmentada



Quatro classes ident.

Resultados Obtidos

- A tabela abaixo mostra a porcentagem de pixels em relação ao total existente na imagem que foram segmentados na etapa final.

Imagens	Pixels Segmentados na Etapa Final (%)	Tempo de CPU (s)	
		1 ^a Etapa	2 ^a Etapa
Figura dos Passos do Método	17.72	0.06	0.16
Figura do AVC	31.61	0.06	0.30
Figura do Tumor	41.68	0.06	0.51

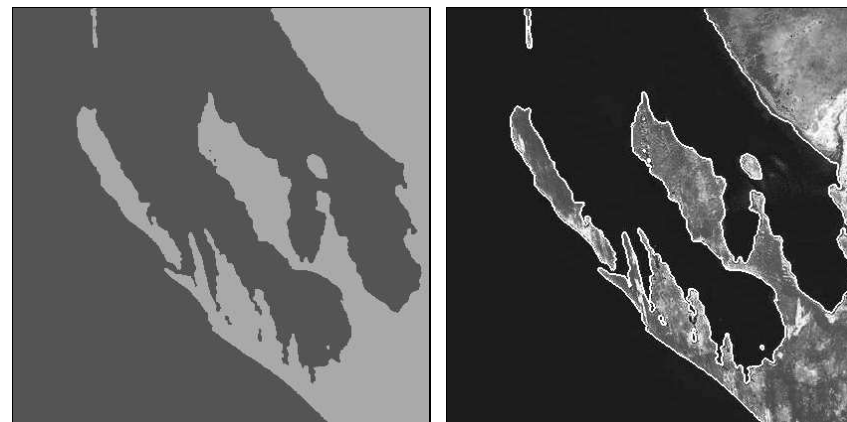
Resultados Obtidos

- Imagem de *Shark Bay, Austrália*. Haar-Haar. Imagem composta por 420×420 pixels.



Imagem original

Segmentação inicial

Detecção de regiões de
fronteira

Classes identificadas

Imagem Segmentada

Resultados Obtidos

- *Moreno Glacier, ARG.* Haar-Daub. Imagem composta por 340×340 pixels.

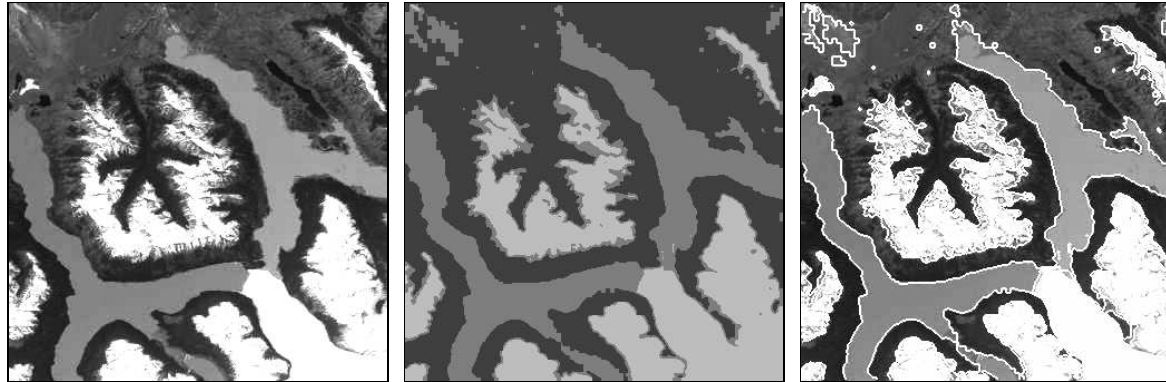


Imagem original

Imagem segmentada

Classes identificadas

- *Baía Chesapeake, EUA.* Daub-Daub. Imagem composta por 320×320 pixels.



Imagem original

Imagem segmentada

Classes identificadas

Resultados Obtidos

- *Beirute Líbano*. Haar-Fourier. Imagem composta por 280×280 pixels.



Imagem original

Imagem segmentada

Classes identificadas

- *Costa Krytar, Yemen*. Daub-Fourier. Imagem composta por 200×200 pixels.



Imagem original

Imagem segmentada

Classes identificadas

Resultados Obtidos

Imagens	Pixels Segmentados na Etapa Final (%)	Tempo de CPU (s)	
		1ª Etapa	2ª Etapa
Shark Bay - Austrália	10.60	0.03	0.04
Moreno Glacier - Argentina	29.34	0.02	0.14
Baía Chesapeake - EUA	37.11	0.02	0.12
Beirute - Líbano	11.98	0.01	0.40
Costa Krytar - Yemen	05.37	0.01	0.12

Comparação entre as Abordagens

- Segmentação inicial e final utilizando as abordagens vistas, tendo como referência a mesma imagem. Imagem composta por 432×432 pixels.

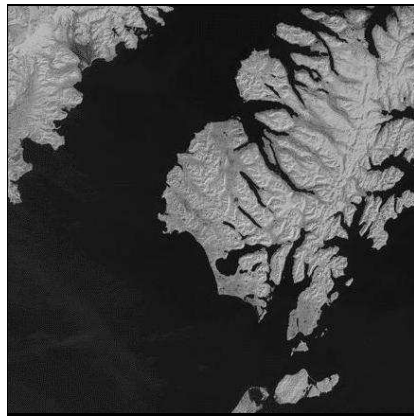
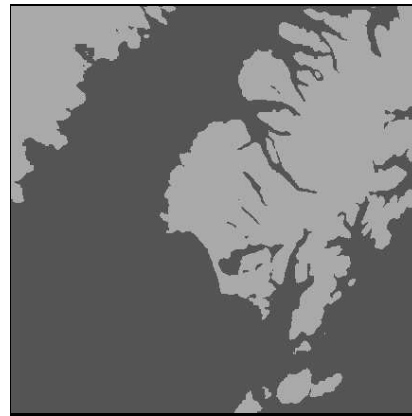
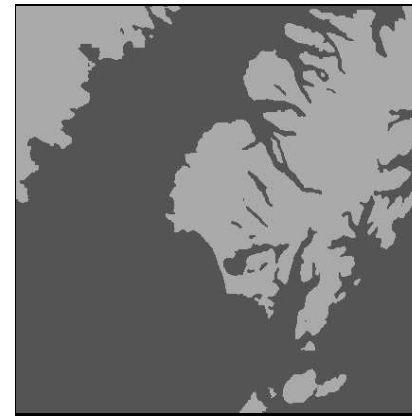


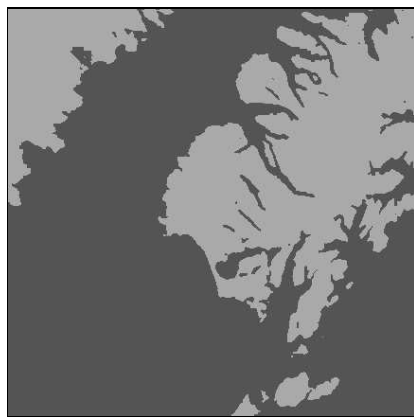
Imagem original



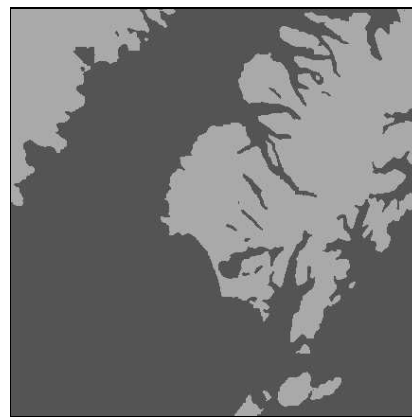
Haar-Haar



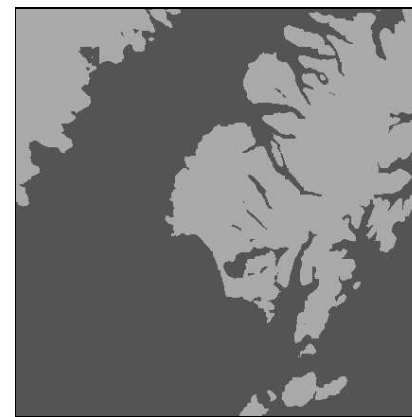
Haar-Daub



Haar-Fourier



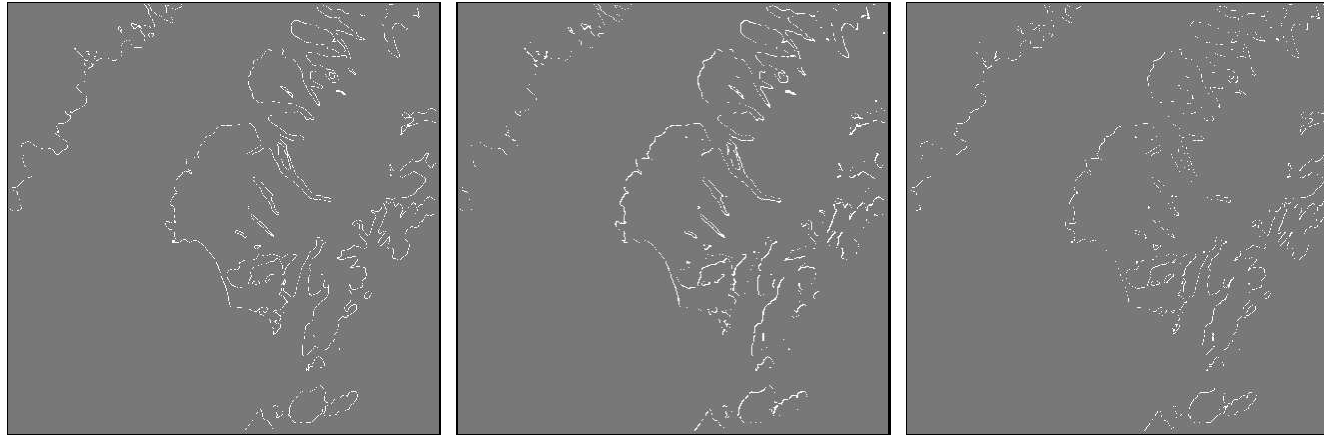
Daub-Daub



Daub-Haar

Comparação entre as Abordagens

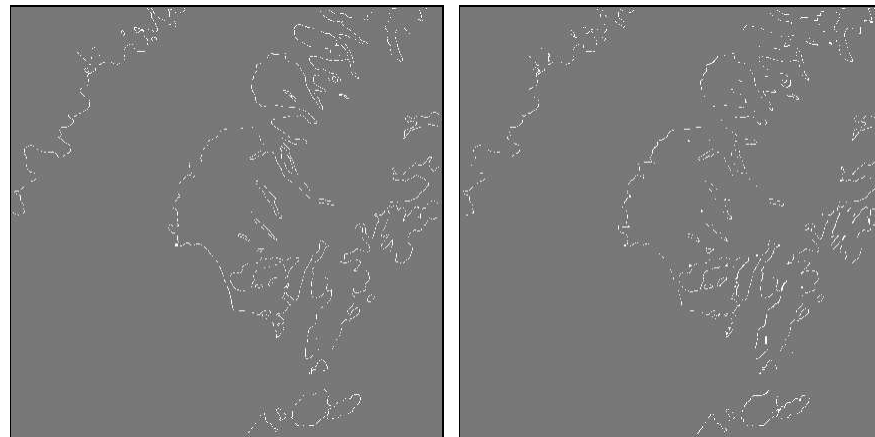
- Diferenças entre as abordagens de segmentação vistas para a figura do slide anterior.



Dif. Haar-Daub

Dif. Haar-Fourier

Dif. Daub-Fourier



Dif. Daub-Haar

Dif. Daub-Fourier

Conclusões e Trabalhos Futuros

- Este trabalho apresentou as transformadas wavelets e de Fourier, enfatizando suas aplicações na área de processamento de imagens digitais, em especial para a segmentação de imagens.
- A partir dos experimentos realizados, observa-se que o método implementado é bastante eficaz para identificar as diferentes classes presentes na imagem.
- O método apresenta baixo custo computacional.
- Como trabalhos futuros, pretende-se estender o método para imagens coloridas e realizar decomposições wavelets com níveis adicionais para permitir melhor extração de características.